Министерство образования Российской Федерации
Ульяновский государственный технический университет

На правах рукописи

Попов Олег Викторович

РАЗРАБОТКА И ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ И ОЦЕНИВАНИЯ МНОГОМЕРНЫХ МАРКОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

Специальность: 05.13.16 – «Применение вычислительной техники, математического моделирования и математических методов в научных исследованиях»

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Научный руководитель
д. т. н., профессор К.К. Васильев

Ульяновск – 2000

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность проблемы. В настоящее время все более широкое применение находят системы извлечения информации, включающие пространственные апертуры датчиков для регистрации полезных сигналов. Важными классами таких систем являются аэрокосмические комплексы дистанционного исследования Земли, радио- и гидролокационные системы различного назначения. Для имитации и обработки сигналов в таких системах необходимо развивать известные методы моделирования и статистического анализа многомерных данных. Актуальность названных задач подчеркивается в целом ряде научно-технических программ, среди которых особое место занимает программа «Информационные технологии и электроника» Министерства науки и технологий РФ, в рамках которой выполнялась настоящая диссертационная работа. Кроме того, она была поддержана грантом РФФИ № 99-01-00913 по теме «Методы и алгоритмы оптимального рекуррентного оценивания многомерных случайных полей».

Проблема математического моделирования и обработки пространственно-временных сигналов рассматривалась в большом числе работ отечественных и зарубежных специалистов. Вместе с тем, в настоящее время отсутствует достаточно полное решение, по крайней мере, двух задач, имеющих первостепенное значение при необходимости имитации или обработки больших коррелированных массивов цифровых данных в реальном масштабе времени, например, последовательностей многозональных спутниковых изображений. Первая из этих задач связана с построением каузальных математических моделей, близких по вероятностным свойствам к изотропным наблюдаемым изображениям. Вторая задача

– создание близких к оптимальным алгоритмов улучшения последовательностей изображений больших размеров в реальном масштабе времени. Решению этих двух задач и посвящена диссертационная работа.

Цель работы. Основной целью работы является разработка и исследование рекуррентных алгоритмов моделирования и пространственно-временного оценивания изображений на фоне помех. Для достижения названной цели необходимо решить следующие задачи:

1. Провести аналитический обзор известных алгоритмов моделирования и фильтрации многомерных изображений.

2. Разработать алгоритмы моделирования многомерных марковских случайных полей (СП).

3. Синтезировать оптимальные и близкие к оптимальным по эффективности алгоритмы рекуррентного оценивания СП на основе разработанных моделей.

4. Исследовать качество и вычислительную сложность разработанных алгоритмов, а также изучить особенности их программной реализации.

5. Разработать пакет программ для исследования предложенных моделей и алгоритмов оценивания на ЭВМ.

Методы исследования. При решении поставленных задач в диссертационной работе использовались методы теории случайных процессов и полей, теории вероятностей и математической статистики, теории функций комплексного переменного, а также современные численные методы. При разработке программного обеспечения применялись методы объектно-ориентированного проектирования программных систем.

Научная новизна. На защиту выносятся следующие результаты, развитые или впервые полученные в настоящей работе:

1. Исследование представительного класса авторегрессионных (АР) моделей многомерных марковских СП с кратными корнями характеристических уравнений.

2. Аналитические соотношения, позволяющие определить корреляционные функции (КФ) N-мерных СП на основе авторегрессионных моделей с характеристическими корнями произвольной кратности.

3. Методика моделирования многомерных марковских СП на основе моделей с кратными корнями, с учетом граничных условий для изображений конечных размеров.

4. Метод количественной оценки анизотропии многомерных СП.

5. Векторные алгоритмы оптимальной фильтрации двумерных изображений на основе предложенных моделей с кратными корнями.

6. Рекуррентные квазиоптимальные алгоритмы фильтрации изображений на фоне аддитивных помех, требующие существенно меньших вычислительных затрат, чем известные аналогичные оптимальные алгоритмы, и обеспечивающие приемлемые потери в эффективности по отношению к оптимальным процедурам.

Практическая значимость. Представлены конкретные описания алгоритмов моделирования и оценивания СП, допускающие их непосредственное использование при проектировании современных и перспективных систем моделирования и обработки изображений. Структура разработанных рекуррентных алгоритмов моделирования и фильтрации изображений предоставляет разработчикам возможность эффективной программно-аппаратной реализации на различных типах вычислительных систем. Предложенные модели многомерных СП могут быть использованы для представления реальных данных при решении ряда важных прикладных задач.

Апробация работы. Основные положения диссертационной работы докладывались и обсуждались на следующих НТК:

- Международной научной конференции «Результаты и перспективы исследования планет» (Ульяновск, 1997 г.);
- 2-й международной научно-технической конференции «Интерактивные системы: проблемы человечеcко-компьютерного взаимодействия» (Ульяновск, 1997 г.);
- Международной научно-технической конференции «Нейронные, реляторные и непрерывнологические сети и модели» (Ульяновск, 1998 г.);
- 4-й конференции «Распознавание образов и анализ изображений: новые информационные технологии» (Новосибирск, 1998 г.);
- 1-й и 2-й Всероссийской научно-практической конференции (с участием стран СНГ) «Современные проблемы создания и эксплуатации радиотехнических систем» (Ульяновск, 1998, 1999 гг.);
- ежегодных конференциях профессорско-преподавательского состава Ульяновского государственного технического университета (1996-1999).

Содержание работы. В первой главе произведен анализ работ в области моделирования и оценивания многомерных СП. Вторая глава посвящена исследованию класса моделей N-мерных СП, основанного на авторегрессиях с кратными корнями одномерных характеристических уравнений. В третьей главе приводится описание оптимальных и близких к оптимальным алгоритмов фильтрации изображений, наблюдаемых на фоне аддитивного гауссовского шума. Четвертая глава посвящена некоторым аспектам практической реализации предложенных алгоритмов и моделей, а также описанию пакета прикладных программ.

1. МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ И ОБРАБОТКИ ИЗОБРАЖЕНИЙ

1.1 Постановка задачи

При решении задач обработки многомерных сигналов в аэрокосмических системах мониторинга Земли, радиолокации, медицине, гидролокации, большое значение имеет построение математических моделей наблюдаемых данных. Дело в том, что именно в таких системах данные, как правило, составляют интенсивные цифровые потоки. Поэтому даже незначительное усложнение моделей для имитации многомерных данных или применение сложных алгоритмов для обработки информации приводит к огромным вычислительным затратам, и, в конечном счете, к невозможности моделирования или обработки сигналов названных систем даже при использовании самых современных вычислительных средств. В связи с этим, весьма важной представляется задача анализа существующих методов представления и обработки многомерных массивов цифровых данных, представленных в виде многомерных изображений. Учитывая дискретный характер реальных систем пространственных датчиков информации и дополнительную дискретизацию по времени при передаче сигналов по цифровым каналам связи, будем рассматривать лишь такие модели, которые представляют СП на многомерных пространственно-временных сетках [10, 23, 32, 36 и др.].

Для решения поставленной задачи вначале проанализированы основные методы имитации изображений, заданных в дискретном пространстве-времени (п. 1.2). При этом основное внимание уделено авторегрессионным стохастическим моделям, но рассмотрены также гиббсовские, волновые и аппликативно-сплайновые модели СП. В п. 1.3 дан аналитический обзор рекуррентных методов оценивания СП на фоне помех.

1.2 Методы имитации изображений

При решении задач обработки изображений важным этапом является выбор адекватной модели наблюдений. В настоящее время не существует универсального способа формирования СП с произвольно заданными характеристиками. Кроме того, отсутствует достаточно полное решение проблемы описания реальных изображений. Поэтому известные модели СП соответствуют реальным изображениям лишь по ограниченному числу параметров (форма корреляционной функции, распределение амплитуд и т.п.). Рассмотрим ряд известных моделей СП, которые могут быть использованы для приближенного описания изображений при синтезе различных процедур фильтрации и обнаружения.

Наиболее изученными являются авторегрессионные модели СП (АР-модели) [3, 6, 23, 26 и др.]. Это объясняется тем, что на основе АР уравнений был разработан математический аппарат для моделирования случайных последовательностей. Было показано [36], что если в окне $W = \{-P \le k \le P\}$ задано произвольное множество положительно определенных вещественных ковариаций $\{r_n\}$, то существует единственная АР-модель случайной последовательности $\{x_k\}$, имеющей точно такие же ковариации:

$$x_k = \sum_{i=1}^{P} a_i x_{k-i} + \xi_k, \;\; M\{\xi_k\} = 0, \;\; M\{\xi_k \xi_l\} = \beta^2 \sigma_{k,l}^2.$$

Параметры $\{a_i, i = 1...P; \beta\}$ данной модели находятся из решения линейной теплицевой системы уравнений:

$$r_k - \sum_{i=1}^{P} a_i r_{k-i} = \beta^2 \sigma_{k,0}, \;\; 0 \le k \le P.$$

Важность данного утверждения состоит в том, по экспериментально полученным в окне W ковариациям реального сигнала можно достаточно просто получить коэффициенты АР-модели.

Традиционно понимаемое свойство марковости случайного процесса связано с понятием фазового состояния процесса и означает независимость поведения процесса в будущем от его поведения в прошлом, при известном фазовом состоянии в текущий момент. Для марковских последовательностей временной интервал может быть разбит любой точкой i на условно независимые прошлое $D^- = \{x^k, k < i\}$ и будущее $D^+ = \{x^k, k > i\}$.

Случайные поля по своему строению значительно сложнее случайных последовательностей. СП X определено на N-мерной области Ω, для геометрического разбиения которой на части D^- и D^+ требуется, как минимум, $(N-1)$-мерная область D [23]. Таким образом, понятие марковости для СП значительно усложняется, и состоит в том, что для любого множества случайных величин (СВ), определенных на Ω, СВ, входящие в D^+, условно независимы от СВ, входящих в D^-, при известном D. Условно, области D^-, D и D^+ можно назвать соответственно прошлым, настоящим и будущим. При этом можно считать, что D с течением времени перемещается по Ω. Так, например, если $X = \{x_{\bar{i}}, \bar{i} \in \Omega\}$ – двумерное изображение, которое формируется построчно, то в качестве D можно рассматривать одну строку изображения. Развитие этой идеи и позволяет распространить АР-модели случайных последовательностей на СП. Однако, при этом порядок формирования поля X требует дополнительного определения.

Чтобы утверждать, что один элемент поля предшествует другому, нужно каким-либо образом предварительно линейно упорядочить узлы сетки Ω. Существует много вариантов такого упорядочения. В двумерном случае чаще всего применяются пилообразная и треугольная развертки [22, 23, 24].

В результате развертки поле преобразуется в случайную последовательность. Пусть она является марковской порядка m, тогда условная ПРВ любого $x_{\bar{i}}$ относительно всех предшествующих ему элементов зависит только от некоторого конечного отрезка $D_{\bar{i}} = \{\bar{j} : (\bar{i}) - m \le (\bar{j}) < (\bar{i})\}$. Область $D_{\bar{i}}$ называется областью глобальных состояний [96]. В двумерном случае она при пилообразной или треугольной развертке включает в себя несколько последних строк кадра (рис. 1.1). Следовательно, $x_{\bar{i}}$ можно представить в каузальном виде как функцию элементов области глобальных состояний и возмущения $\xi_{\bar{i}}$:

$$x_{\bar{i}} = f_{\bar{i}}\left(x_{\bar{j}} : \bar{j} \in D_{\bar{j}}; \xi_{\bar{i}}\right) \qquad (1.1)$$

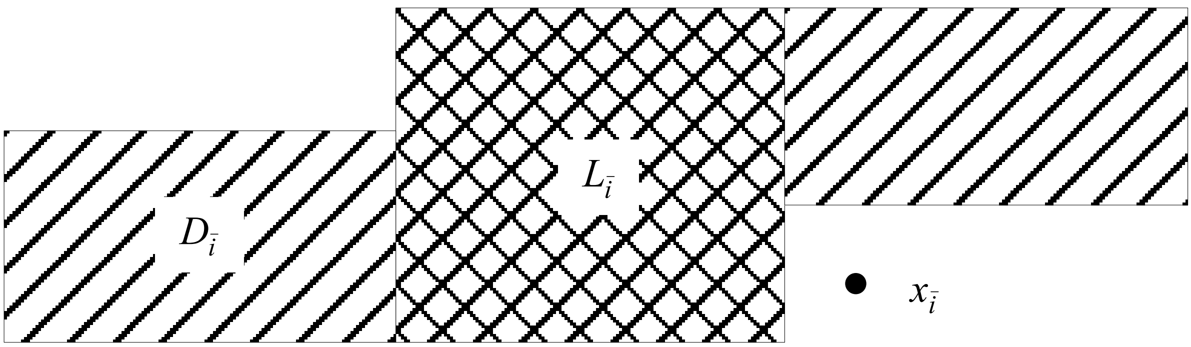


Рис. 1.1 Структура области глобальных состояний.

Выражение (1.1) описывает АР-модель СП. Однако с увеличением области $D_{\bar{i}}$ использовать (1.1) становится все труднее. Обойти эту проблему позволяет тот факт, что ПРВ $x_{\bar{i}}$ зачастую определена не на всей области $D_{\bar{i}}$, а только на некоторой ее части

$L_{\bar{i}}$, называемой областью локальных состояний [96] и включающей достаточно близкие к $x_{\bar{i}}$ элементы $D_{\bar{i}}$, не упреждающие $x_{\bar{i}}$ относительно развертки. В результате этих рассуждений поле X может быть представлено АР-моделью

$$x_{\bar{i}} = f_{\bar{i}}\left(x_{\bar{j}} : \bar{j} \in L_{\bar{j}}; \xi_{\bar{i}}\right), \tag{1.2}$$

которая позволяет снизить объем вычислений при имитации СП.

Рассмотрим линейную гауссовскую АР-модель

$$x_{\bar{i}} = \sum_{\bar{j} \in L_{\bar{i}}} \alpha_{\bar{j}} x_{\bar{i}+\bar{j}} + \beta \xi_{\bar{i}}, \tag{1.3}$$

где применена многомерная развертка сетки Ω. Здесь $\alpha_{\bar{j}}$ – весовые коэффициенты; $L_{\bar{i}}$ – область локальных состояний; $\xi_{\bar{i}}$ – система независимых стандартных гауссовских СВ.

Важным обобщением (1.3) является векторная АР-модель СП:

$$\bar{x}_{\bar{i}} = \sum_{\bar{j} \in D} A_{\bar{j}} \bar{x}_{\bar{i}+\bar{j}} + B \bar{\xi}_{\bar{i}}, \tag{1.4}$$

где $\bar{x}_{\bar{i}}$ – значение векторного поля в узле $\bar{i}$; $A_{\bar{j}}$, B – квадратные матрицы; $\bar{\xi}_{\bar{i}}$ – порождающее стандартное гауссовское поле векторов с независимыми компонентами. В [23] показано, что любая модель (1.3) может быть приведена к форме (1.4), содержащей минимально возможное число слагаемых.

Одним из простейших вариантов является так называемая «трехточечная» АР-модель [Habibi, 82]:

$$\begin{gathered} x_{i,j} = \rho_y x_{i-1,j} + \rho_x x_{i,j-1} - \rho_y \rho_x x_{i-1,j-1} + \\ + \sigma_x \sqrt{\left(1-\rho_y^2\right)\left(1-\rho_x^2\right)} \xi_{i,j} \end{gathered} . \tag{1.5}$$

Порождаемое моделью (1.5) СП имеет следующую КФ:

$$V_x(k,l)=\sigma_x^2\rho_y^{|k|}\rho_x^{|l|}. \qquad (1.6)$$

На рис. 1.2 представлена реализация СП, сформированного по формуле (1.5) размером 600x400 элементов при $\rho_y=\rho_x=0.95$. Наиболее существенный недостаток данной модели – множительность КФ. В двумерном случае одинаково коррелированные с $x_{i,j}$ элементы поля расположены на ромбе с центром в (i,j). В то же время, сечениями КФ реальных полей являются обычно различной кривизны эллипсы. На рисунке 1.3 приведены уровни равной корреляции для модели Хабиби.

Для скругления сечений КФ СП необходимо увеличивать порядок марковости (расширять область локальных состояний). Так, например, пятиточечная модель СП [2]

$$\begin{aligned} x_{i,j}=\alpha_1 x_{i-1,j}+\alpha_2 x_{i,j-1}+\alpha_3 x_{i-1,j-1}+ \\ +\alpha_4 x_{i-2,j}+\alpha_5 x_{i,j-2}+\beta\xi_{i,j} \end{aligned} \qquad (1.7)$$

позволяет получить СП с разнообразными формами сечений КФ. Однако применение этой модели на практике ограничено в связи с отсутствием на данный момент решений, позволяющих вычислять коэффициенты пятиточечной модели для произвольно заданной КФ.

Сопоставляя выражения (1.4) – (1.7), можно заметить важное преимущество векторной формы записи (1.4) перед скалярной формой (1.5). Расширение области локальных состояний в записи (1.5) приводит к увеличению числа слагаемых, а количество слагаемых в записи (1.4) при этом не меняется, хотя при этом могут увеличиваться размерности матриц и векторов. Это достоинство стало особенно важным с развитием объектно-ориентированных методов программирования, позволяющих динамически менять размеры матриц без изменения самой моделирующей программы [93].

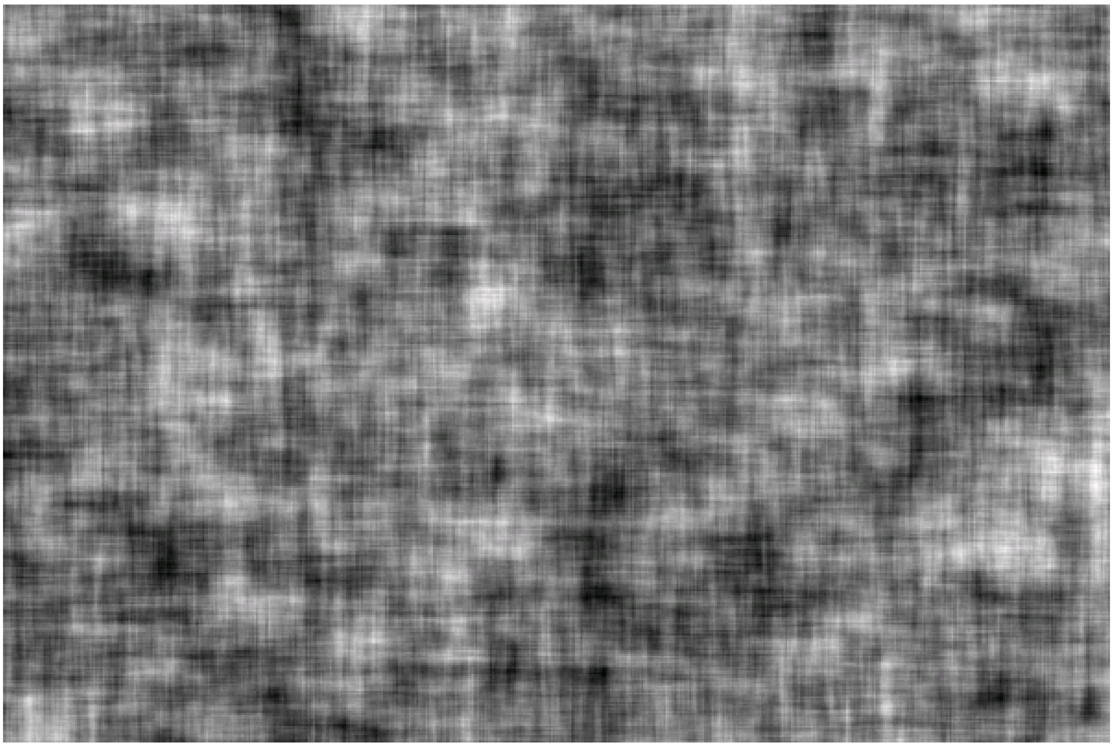


Рис. 1.2   Реализация модели Хабиби.

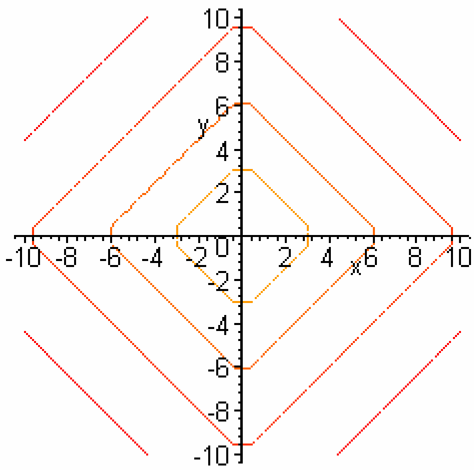


Рис. 1.3   Уровни одинаковой корреляции модели Хабиби.

Выражение (1.5) можно рассматривать как двумерное расширение авторегрессии первого порядка

$$x_i = \rho x_{i-1} + \xi_i, \tag{1.8}$$

где ρ – коэффициент корреляции соседних элементов последовательности, ξ_i – некоторая случайная величина. Исследования [37] показали, что аналогичным образом может быть расширена на двумерный случай и авторегрессия второго и более высоких порядков. Например, для процесса АР второго порядка

$$x_i = 2\rho x_{i-1} + \rho^2 x_{i-2} + \xi_i. \tag{1.9}$$

может быть получена соответствующая восьмиточечная модель СП:

$$\begin{aligned} x_{ij} &= 2\rho_y x_{i-1,j} + 2\rho_x x_{i,j-1} - 4\rho_y \rho_x x_{i-1,j-1} - \\ &- \rho_y^2 x_{i-2,j} - \rho_x^2 x_{i,j-2} + 2\rho_y^2 \rho_x x_{i-2,j-1} + \\ &+ 2\rho_x^2 \rho_y x_{i-1,j-2} - \rho_y^2 \rho_x^2 x_{i-2,j-2} + b\xi_{ij} \end{aligned}. \tag{1.10}$$

Можно показать, что КФ данной модели значительно отличается от КФ модели (1.5) и принимает следующий вид:

$$R(r_y, r_x) = \sigma_x^2 \left(1 + \frac{1-\rho_y^2}{1+\rho_y^2}|r_y|\right)\left(1 + \frac{1-\rho_x^2}{1+\rho_x^2}|r_x|\right)\rho_y^{|r_y|}\rho_x^{|r_x|}, \tag{1.11}$$

где σ_x^2 – дисперсия поля X, ρ_y, ρ_x – параметры модели. Анализ показывает [64], что сечения высоких уровней КФ близки к эллипсоидам. Таким образом, появляется возможность использования простых методов формирования близких к реальным изображениям реализаций СП с квазиизотропными свойствами. Модель (1.11) является частным случаем более общей модели многомерных СП с кратными корнями, исследованию которой посвящена вторая глава данной работы.

Одним из перспективных направлений описания СП являются гиббсовские марковские вероятностные модели ансамблей дискретизованных изображений [32, 55].

Набор чисел $U = \{U(m,n);(m,n) \in Q\}$ можно рассматривать как совокупность значений Q обобщенных координат некоторой физической системы, находящейся в тепловом равновесии при температуре T. Плотность распределения вероятности состояний системы с заданными координатами и определяется распределением Гиббса

$$P(u) = z^{-1} \exp\left\{\frac{-W(u)}{kT}\right\}, \tag{1.12}$$

где k – постоянная Больцмана, $W(u)$ – потенциальная энергия системы, z^{-1} – нормирующий множитель. Физическую систему с потенциальной энергией $W(u) = kTU(u)$ можно назвать физической моделью ансамбля изображений с потенциальной функцией $U(u)$, поскольку изображение, описываемое массивом U, и состояния системы с этими значениями координат имеют одинаковые вероятности.

Важным частным случаем гиббсовского СП является d-марковское СП. Плотность вероятности совокупности значений элементов d-марковского поля из массива Q при заданных значениях остальных элементов зависит от значений элементов, принадлежащих множеству $Q_c = \overline{Q} \setminus Q$, где $\overline{Q}$ – расширенное множество $\overline{Q} = \bigcup\limits_{(m,n) \in Q} D_{mn}(d)$:

$$P(u \mid u_c) = z^{-1} \exp\{-U(u \mid u_c)\}, \tag{1.13}$$

где $u_c = U(Q_c) = \{U(m',n') : (m',n') \in Q_c\}$.

Как известно, потенциальная функция $U(u \,|\, u_c)$ марковского СП распадается на слагаемые. В частности, потенциальная функция однородного марковского поля определяется только двумя потенциалами парного взаимодействия $W_h(U(m,n),U(m,n+1))$ и $W_v(U(m,n),U(m+1,n))$:

$$U(u \,|\, u_c) = \sum_{(m,n)\in Q'} W_h(U(m,n),U(m,n+1)) + \\ + \sum_{(m,n)\in Q''} W_v(U(m,n),U(m+1,n)) \quad , \qquad (1.14)$$

где множество $Q' = \{(m,n) : (m,n),(m,n+1) \in \overline{Q}\}$, множество Q'' определяется аналогично.

Простейшим гиббсовским полем является гаусс-марковское с квадратичными потенциалами взаимодействия. В этом случае их можно определить следующим образом:

$$W_h(U(m,n),U(m,n+1)) = \frac{a}{8}\left((U(m,n)-\mu)^2 + (U(m,n+1)-\mu)^2\right) + \\ + \frac{b}{8}(U(m,n)-U(m,n+1))^2; \\ W_v(U(m,n),U(m+1,n)) = \frac{a}{8}\left((U(m,n)-\mu)^2 + (U(m+1,n)-\mu)^2\right) + \\ + \frac{c}{2}(U(m,n)-U(m+1,n))^2, \qquad (1.15)$$

где μ – среднее по ансамблю значение яркости элемента изображения.

При этом получаем следующую потенциальную функцию:

$$U(u \,|\, u_c) = \frac{a}{2}\sum_{Q'}(U(m,n)-\mu)^2 + \frac{b}{2}\sum_{Q'}(U(m,n)-U(m,n+1))^2 + \\ + \frac{c}{2}\sum_{Q''}(U(m,n)-U(m+1,n))^2 \quad . \qquad (1.16)$$

Из (1.16) следует, что наименьшее значение потенциальной функции, т.е. наибольшее значение плотности вероятности (1.12), достигается при $U(m,n)=\mu,\ (m,n)\in Q$. Так, при $b >> a,\ c >> a$ типичными изображениями ансамбля будут изображения с медленными пространственными изменениями, или, как говорят, с малыми локальными контрастами.

Сравнение структурных свойств реализаций гаусс-марковского поля и свойств реальных изображений показывает, что такое поле имеет довольно узкую сферу приложения, т.к. на реальных изображениях часто встречаются области почти постоянной яркости с резкими границами, в то время как для реализаций гаусс-марковского поля более характерны плавные изменения яркости. Однако, описанная модель имеет свою сферу приложения, в частности при сегментации изображений [1]. Кроме того, данная модель предоставляет определенные удобства при описании последовательности изображений, а также при совместной обработке многозональных снимков [10, 23].

Обобщением ряда моделей является так называемая "волновая" модель [43].

Пусть СП S определяется равенством

$$S(x,t)=\sum_{\{i:\tau\le t\}} f(x,t;\,u_i,\tau_i;\,\overline{\varpi}_i),\qquad (1.17)$$

где $x=(x_1,x_2,...,x_n)$, $u=(u_{i_1},u_{i_2},...,u_{i_n})$ – точки n-мерного пространства; t, τ_i – время; $\{(u_i,\tau_i)\}$ – дискретное поле случайных точек (ПСТ); $\overline{\varpi}_i$ –вектор случайных параметров функции.

Такие СП можно трактовать как результат суммарного воздействия случайных возмущений (волн) $f(x,t;\,u_i,\tau_i;\,\overline{\varpi}_i)$, возникающих в случайных местах u_i в случайные моменты времени τ_i и изменяющихся по некоторому закону во времени и в пространстве. Выбор способа формирования волн f, параметров ПСТ и $\overline{\varpi}_i$ позволяет получить широкий спектр типов СП, например пуассоновские поля, модель взвешенных сумм, модели случайных блужданий.

В работах [21] и [43] показано, что для простейших типов волн сравнительно легко решается и задача синтеза СП с заданным типом КФ.

На рисунке 1.4 представлено изображение размером 100×100 элементов, полученное при помощи одной из простейших волновых моделей.

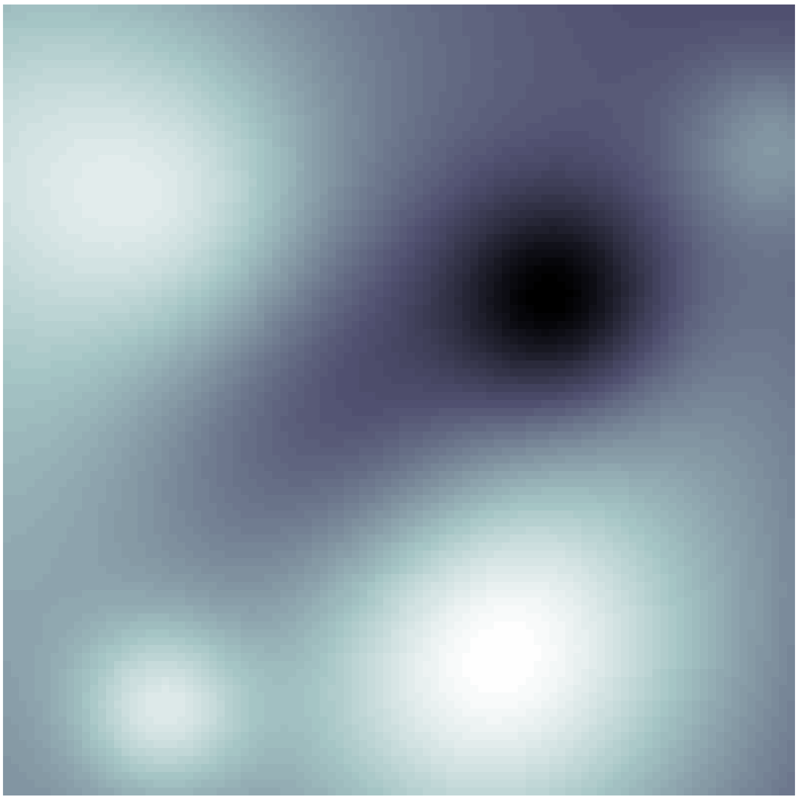


Рис. 1.4 Реализация волновой модели.

К недостаткам данной модели можно отнести излишнюю гладкость получаемых полей, что значительно сужает круг возможных применений. Кроме того, для формирования такого поля требуются существенные вычислительные затраты. Наконец, в настоящее время не решен и представляется весьма сложным вопрос об аналитическом представлении законов распределения вероятностей волновых моделей.

Модели, учитывающие только ближайшие связи элементов, не могут достаточно полно описать свойства реальных изображений, т.к. различные фрагменты реального изображения, как правило, обладают различными статистическими свойствами. Типичным примером могут послужить изображения, содержащие контуры. В работе [92] предлагается вариант модели, рассматривающий изображение как сумму двух независимых компонент – кусочно-гладкой (контурной) пространственной компоненты, определяющей глобальные яркостные изменения и высокочастотной компоненты, задающей текстуру, шум, мелкие детали.

Достоинствами данной модели являются ее хорошее соответствие реальным изображениям, а также широкий диапазон приложений, где она может быть использована. Недостаток – сложность решения задачи синтеза изображений по заданным параметрам.

Описанную двухмасштабную модель можно считать переходным этапом между однородными и неоднородными СП. Очевидно, для описания неоднородных СП требуются специальные характеристики и, соответственно, новые способы формирования СП.

В работе [36] предлагается алгоритмический подход к параметризации изображений. При этом текстурное изображение (ТИ) рассматривается как результат прохождения стандартного порождающего текстурного поля через систему, которая строится из фиксированного набора стандартных элементов (блоков), соединенных между собой по заданным правилам. При этом определенному набору и способу соединения блоков, реализованному в данной системе, соответствует ТИ одного класса и наоборот, ТИ, которые относятся к одному классу, соответствует определенная структурная схема системы. Тем самым задача синтеза ТИ сводится к выбору вида и структуры системы, а задача анализа – к задаче идентификации системы.

Предлагается следующий набор стандартных блоков системы: линейный фильтр (ЛФ), блок поэлементного нелинейного преобразования (ПНП), множительные и суммирующие звенья, коммутаторы. Указанные блоки могут иметь как фиксированные, так и регулируемые по управляющим входам параметры. В качестве стандартного текстурного поля предполагается поле, получаемое от датчика независимых и равномерно распределенных в фиксированном диапазоне псевдослучайных чисел. В качестве соединений можно использовать последовательную, параллельную и обратную связь. Использование обратной связи позволяет моделировать динамические системы, что дает возможность получить широкий спектр различных типов полей.

Авторами показано, что применение такого подхода к представлению изображений позволяет успешно решать как задачи анализа, так и задачи синтеза изображений. При этом задача анализа сводится к идентификации параметров блоков системы.

Достоинством предложенного подхода является легкость описания пространственных неоднородностей изображения. Кроме того, рассмотренная модель позволяет описывать не только полезные, но и «зашумленные» изображения, подлежащие восстановлению. При этом искажения и шумы так же легко описываются в виде комбинации названных блоков системы.

Существенным недостатком является нерекуррентность предлагаемых процедур, и как следствие – высокие требования к вычислительным ресурсам ЭВМ.

Практическим примером класса алгоритмических моделей может служить аппликативно-сплайновая модель [91]. При этом синтез неоднородного изображения заключается в разбиении по случайному закону плоскости изображения на кластеры. В пределах каждого из кластеров предполагается однородность модели. После заполнения (аппликации) этих кластеров выборочными фрагментами СП, синтезируемых на основе различных однородных моделей, полученное изображение будет обладать существенно неоднородной структурой. Для заполнения однородных фрагментов используется процедура сплайновой интерполяции эквидистантной сетки отсчетов, распределенных по нормальному закону.

При анализе и синтезе процедур обработки изображений применение неоднородных моделей СП не всегда целесообразно, т.к. в конечном итоге любое неоднородное СП можно разбить на фрагменты, которые можно считать однородными, а неоднородность трактовать как то или иное изменение параметров модели. В классе однородных моделей СП во многих случаях удобнее всего использовать авторегрессионные модели случайных полей. Более сложные модели применяются в основном для исследования эффективности разработанных алгоритмов при отклонении параметров входных данных от свойств предполагаемой модели.

1.3 Методы оценивания изображений

Важным этапом обработки изображений является сглаживание поступающих от датчиков зашумленных изображений с целью минимизации искажающего действия шумов на последующих этапах обработки данных. Методы сглаживания изображений можно условно разделить на две группы. К первой относятся методы, требующие знания полной априорной информации о статистических свойствах неискаженного изображения и шума. Такие методы, как правило, базируются на основе фильтров Винера и Калмана [1, 2, 6, 96]. Ко второй группе относятся локальные операторы, действующие на зашумленном изображении. При обработке каждого элемента изображения используются только отсчеты в небольшой ее окрестности. При этом за счет потери качества обработки достигается возможность сокращения общего объема вычислений.

Простейшей локальной операцией является усреднение в окрестности точки. При этом яркость элемента заменяется средним взвешенным значением уровней яркости, полученных путем свертки отсчетов изображения в скользящем окне с некоторым прямоугольным шаблоном весовых коэффициентов [1]. Усовершенствованием данного метода является сглаживание со взвешиванием отсчетов по обратному градиенту [1]. В этом случае чем больше разность яркостей текущей и центральной точек, тем меньше вес данного отсчета.

Другая группа локальных операторов основана на полном исключении вклада в усредненное значение тех отсчетов, которые не удовлетворяют некоторому критерию однородности [6]. Например, замена текущего значения усредненным осуществляется при условии, что разность между этими значениями меньше заданной.

Типичным примером такого локального оператора может служить сигма-фильтр [1]. К этому же подклассу локальных операторов можно отнести и медианный фильтр [1, 45]. Наиболее эффективна медианная фильтрация при отбраковке импульсных помех. Несомненным достоинством медианного фильтра являются малые вычислительные затраты в связи с отсутствием операций умножения.

К третьей группе локальных операторов можно отнести сглаживание по наиболее неоднородной окрестности центральной точки [45]. В пределах окна выбирается несколько окон меньшего размера и для каждого вычисляется среднее и дисперсия. Элементу присваивается среднее значение из окрестности с минимальной дисперсией. Возможны и другие критерии выбора.

Четвертая группа локальных операторов реализует аппроксимационный подход [6]. Полный кадр разбивается на фрагменты, в пределах которых изображение аппроксимируется полиномом по методу наименьших квадратов.

К пятой группе локальных операторов можно отнести комбинированные методы [7].

Из перечисленных выше локальных процедур только две в достаточной степени пригодны при решении задач фильтрации изображений из смеси с аддитивным шумом: фильтр скользящего среднего и аппроксимация полиномом. Однако, фильтр скользящего среднего дает невысокое качество фильтрации, а хорошая аппроксимация полиномом требует больших вычислительных затрат. Остальные же локальные операторы ориентированы в основном на фильтрацию импульсных помех и мало пригодны, например, для построения прогноза при обнаружении аномалий на изображениях [14, 63].

Несмотря на появление специализированных алгоритмов фильтрации изображений [56], предпринимаются попытки использовать для этой цели винеровские процедуры. Так, в работе [72] был предложен подход, позволяющий производить винеровскую фильтрацию изображений путем рекурсивного пересчета, что повышает скорость обработки по сравнению с «классическим» вариантом фильтра Винера.

Недостатком данного подхода является то, что результаты фильтрации будут близкими к оптимальным лишь при условии, что спектр изображения может быть факторизован на спектр по столбцу и спектр по строке, что является довольно редкой ситуацией.

Одной из первых публикаций решения задач рекуррентного оценивания изображений является [Хабиби, 82]. Достоинством фильтра Хабиби является его простота и, как следствие, довольно высокая вычислительная эффективность. К наиболее существенным недостаткам следует отнести невозможность распространения предлагаемой процедуры на более широкий класс СП, имеющих отличные от множительной корреляционные функции, а также относительно невысокое качество оценки фильтруемого поля вблизи границ наблюдаемых кадров.

Наибольшую популярность в задачах фильтрации случайных последовательностей завоевал, благодаря своей рекуррентности, фильтр Калмана [2]. В работе [96] предпринята попытка прямого применения фильтра Калмана для обработки двумерных изображений.

Рассмотрим такую возможность более подробно. Пусть марковское СП задано на двумерной сетке $\Omega = \{(i,j): i = \overline{1,M}; j = \overline{1,N}\}$ АР-моделью

$$x_{i,j} = \rho_y x_{i-1,j} + \rho_x x_{i,j-1} - \rho_y \rho_x x_{i-1,j-1} + \xi_{i,j}, \quad (1.21)$$

где ρ_y и ρ_x – коэффициенты корреляции соседних элементов по столбцу и строке соответственно; $\{\xi_{i,j}\}$ – двумерное поле независимых гауссовских СВ с нулевыми средними и дисперсиями $\sigma_\varepsilon^2 = M\{\xi_{i,j}^2\} = (1-\rho_y^2)(1-\rho_x^2)\sigma_x^2$, $\sigma_x^2 = M\{x_{i,j}^2\}$. Задача оценивания рассматривается для аддитивной модели наблюдений:

$$z_{ij} = x_{ij} + \theta_{ij},\ (i,j) \in \Omega, \tag{1.22}$$

где $\{\theta_{ij}\}$ – белое гауссовское поле с σ_θ^2.

В работе [96] предлагается включить в расширенный вектор состояния следующие элементы:

$$\bar{x}_{ij} = \left(x_{ij}, x_{i(j-1)}, x_{i(j-2)}, \ldots, x_{i1}, \ldots, x_{(i-1)N}, x_{(i-1)(N-1)}, \ldots, x_{(i-1)(j+1)}\right).$$

Тогда стохастическое разностное уравнение (1.21) может быть переписано в виде:

$$\bar{x}_{ij} = R\bar{x}_{i(j-1)} + \bar{\xi}_{ij}, \tag{1.23}$$

где $\bar{\xi}_{ij} = (\xi_{ij}, 0, \ldots, 0)^T$. Компоненты $N \times N$ матрицы R находятся с помощью простого сопоставления (1.21) и (1.23):

$$R = \begin{pmatrix} \rho_x & 0 & 0 & \ldots & 0 & \rho_y & -\rho_x\rho_y & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Переписывая модель наблюдений (1.22) в векторной форме

$$\bar{z}_{ij} = F\bar{x}_{ij} + \bar{\theta}_{ij}, \tag{1.24}$$

где $F = (1, 0, \ldots, 0)$, можно воспользоваться известными [74] результатами калмановской фильтрации многомерной последовательности.

Такой подход дает строго оптимальное в смысле минимума дисперсии ошибки оценивания решение. Однако он имеет практическое значение лишь для кадров небольших размеров с $M, N < 50$, т.к. требует большого количества матричных операций на каждом шаге фильтрации, что с ростом M и N становится практически нереализуемым.

Опыт моделирования данной процедуры показал, что технически приемлемой является ширина кадра изображения $1 \le M, N \le 20$.

В работе [Dikshit, 90] предложен вариант прямого применения алгоритмов Калмана с использованием «скользящего окна». Такой подход основывается на включении в вектор состояния $\bar{x}_{ij}$ элементов, принадлежащих квадратному или прямоугольному окну. Так, например, окно 3х3 элемента можно описать следующим выражением:

$$\bar{x}_{ij} = \{x_{ij}, (i-1 \le i < (i+1), (j-1) \le j < (j+1))\}.$$

Окно «скользит» по изображению с единичным шагом. Таким образом, при движении вдоль строки каждый элемент изображения в окне 3×3 участвует в оценке 14 своих соседей, а, значит, оценивается на основе информации в 14 соседних точках, несмотря на то, что размер вектора состояния – всего 9 элементов. При этом оцененными наилучшим образом всегда являются элементы x_1, x_6 и x_7 вектора состояния. Следует подчеркнуть, что окно «скользит» по изображению с единичным шагом не только по индексу i, но и по индексу j. Таким образом, получаются три слабо зависимые оценки, которые затем складываются с определенными весами. Слабую зависимость этих оценок удается получить благодаря предложенному Дикшитом нетрадиционному способу развертки изображения «змейкой», вследствие чего оценка каждый раз производится на основе различных (хотя и пересекающихся наборов данных).

Несомненным достоинством такого способа сканирования изображения является «объемность» вектора состояния, благодаря чему появляется возможность фильтровать не только аддитивный шум, но и учитывать линейные искажения F в выражении (1.24). Естественно, при такой постановке задачи размер окна должен быть достаточно большим, чтобы можно было учесть соответствующие параметры «смаза» или расфокусировки изображения.

Следует отметить, что в рамках такого подхода окно $\bar{x}_{ij}$ не является областью локальных состояний, а выбирается исходя из компромисса между сложностью и эффективностью алгоритма.

В последние годы все большее распространение получают специализированные квазиоптимальные рекуррентные алгоритмы оценивания изображений [23, 29, 72].

В работах [4, 12] показано, что радикального сокращения объема вычислений можно достичь отказом от прямого применения калмановских процедур, как не соответствующих задачам обработки изображений. Установлено, что одной из причин противоречия между требованиями глобальной оптимальности и рекуррентности является использование растровой развертки двумерного поля, т.е. считывание значений $\{z_{ij}\}$ по каждому индексу в одном направлении. С точки зрения синтеза рекуррентных процедур оптимального оценивания марковского поля $\{x_{ij}\}$ такой способ считывания приводит к необходимости на каждом шаге фильтрации оперировать всеми элементами по крайней мере одной строки. Для построения оптимальных процедур, основанных лишь на оценках «ближайших» соседей очередного элемента, необходимо, чтобы соседние элементы были представлены строго оптимальными оценками. Наиболее просто этого можно достичь при использовании «треугольной» развертки, т.е. построчного считывания элементов с изменением направления считывания после анализа очередной строки [23]. Особенностью такого способа считывания является постоянное расстояние между любыми двумя элементами при последовательном анализе.

Данный алгоритм оценивания обладает высоким быстродействием [23, 14] при величине максимального проигрыша по дисперсии ошибки порядка 40%. Однако, заложенные в алгоритме идеи сложно применить для СП размерности больше двух.

1.4 Выводы

1. Анализ различных широко применяемых в приложениях моделей случайных полей (авторегрессионных, гиббсовских, волновых и др.) показал, что для представления последовательностей многомерных кадров наиболее предпочтительными по вычислительным затратам является класс моделей пространственной авторегрессии.

2. Анализ известных авторегрессионных моделей позволил сделать вывод о наличии у них двух главных недостатков. Первый заключается в значительной анизотропии порождаемых СП при малых областях локальных состояний. Второй недостаток связан с отсутствием решения задачи построения таких моделей по заданному виду корреляционной функции.

3. Анализ существующих методов оценивания изображений показывает, что на сегодняшний день отсутствуют алгоритмы, сочетающие в себе высокую эффективность оценивания и приемлемое быстродействие, позволяющее вести обработку данных в реальном времени. Целью дальнейших исследований должна быть разработка рекуррентного квазиоптимального алгоритма оценивания изображений, удовлетворяющего названным требованиям.

4. Таким образом, представляются весьма важными следующие задачи:

а) выделение таких подклассов авторегрессионных уравнений, которые позволили бы получать близкие к изотропным многомерные СП и, вместе с тем, обеспечивали возможность построения моделей по заданным корреляционным свойствам;

б) разработка рекуррентных оптимальных или близких к ним алгоритмов оценивания СП, порожденных авторегрессионными уравнениями названных подклассов.

2. АВТОРЕГРЕССИОННЫЕ МОДЕЛИ ИЗОБРАЖЕНИЙ С КРАТНЫМИ КОРНЯМИ

2.1 Постановка задачи

Случайные поля являются хорошими математическими моделями реальных сигналов и помех в разнообразных приложениях, таких как системы технического зрения, спутниковые системы дистанционного исследования Земли и др. Разработка моделей реальных данных не только дает возможность лучше понять их природу, но и позволяет синтезировать оптимальные алгоритмы обработки наблюдений. Несмотря на большое число публикаций, посвященных проблемам представления и обработки СП, решение задач представления и статистического анализа многомерных СП далеко от своего завершения. Применение хорошо изученных методов теории случайных процессов при переходе ко многим измерениям зачастую приводит к трудно реализуемым процедурам. Одним из перспективных классов СП с точки зрения вычислительных затрат являются многомерные авторегрессионные модели [23, 24].

Целью данной главы является построение класса моделей СП, основанных на использовании авторегрессий с кратными корнями характеристических уравнений, а также аналитические исследования вероятностных характеристик этих моделей, статистическое моделирование таких СП и решение задачи идентификации параметров моделей на основе реальных данных.

2.2 Вероятностный синтез и анализ моделей

Остановимся вначале на основных вероятностных характеристиках многомерных авторегрессионных моделей СП. Этот класс СП порождается линейными стохастическими разностными уравнениями следующего вида:

$$x_{\bar{i}} = \sum_{\bar{j} \in D} \alpha_{\bar{j}} x_{\bar{i}-\bar{j}} + \beta \xi_{\bar{i}}, \ \bar{i} \in \Omega, \qquad (2.1)$$

где $X = \{x_{\bar{i}}, \bar{i} \in \Omega\}$ – моделируемое СП, определенное на N-мерной сетке $\Omega = \{\bar{i} = (i_1, i_2, \dots i_N) : \{i_k = \overline{1 \dots M_k}\}, k = \overline{1 \dots N}\}$; $\{\alpha_{\bar{j}}, \beta, \bar{j} \in D\}$ – коэффициенты модели; $\Xi = \{\xi_{\bar{i}}, \bar{i} \in \Omega\}$ – порождающее белое СП; $D \subset \Omega$ – каузальная область локальных состояний.

Наиболее часто в качестве порождающего поля Ξ выбирают нормально распределенное СП с независимыми компонентами. В этом случае СП X также имеет гауссовское распределение.

Задача анализа моделей (2.1) в общем виде рассматривалась в [23, 64]. Модели (2.1) соответствует пространственный линейный фильтр с передаточной функцией

$$H(\bar{z}) = \frac{\beta}{1 - \sum_{\bar{j} \in D} \alpha_{\bar{j}} \bar{z}^{-\bar{j}}}, \qquad (2.2)$$

где $\bar{z}^{-\bar{j}} = z_1^{-j_1} z_2^{-j_2} \dots z_N^{-j_N}$. При этом спектральная плотность СП X записывается следующим образом:

$$S_x(\bar{z}) = H(\bar{z}) S_\xi(\bar{z}) H(\bar{z}^{-1}) = \sigma_\xi^2 H(\bar{z}) H(\bar{z}^{-1}), \qquad (2.3)$$

где σ_ξ^2 – дисперсия СП Ξ.

Корреляционная функция поля X может быть найдена с помощью обратного z-преобразования спектральной плотности:

$$R(\bar{r}) = \frac{\beta^2}{(2\pi i)^N} \oint_{C_N} S_x(\bar{z}) \bar{z}^{\bar{r}-\bar{1}} d\bar{z}, \qquad (2.4)$$

где $C_N = \{|\bar{z}| = 1\}$ – единичная полиокружность в многомерном комплексном пространстве.

Как показано в работах [46, 51, 52], анализ вероятностных свойств СП сильно упрощается, если их спектральная плотность может быть факторизована. Такие «разделимые» СП, со спектральной плотностью $S_x(\bar{z}) = \prod_{k=1}^{N} S_k(z_k)$, представляют собой удобный объект для исследований. Поскольку у таких полей передаточная функция многомерного фильтра $H(\bar{z}) = \prod_{k=1}^{N} H_k(z_k)$ и КФ $R(\bar{r}) = \prod_{k=1}^{N} R_k(r_k)$ также факторизуются, то для решения задачи статистического анализа многомерного СП достаточно исследовать свойства случайных последовательностей, порожденных одномерными авторегрессиями с характеристиками $S_k(z_k)$, $H_k(z_k)$ и $R_k(r_k)$, $k = \overline{1 \ldots M_k}$.

К недостаткам таких моделей следует отнести невозможность описания с их помощью изотропных СП, например, с КФ $R(\bar{r}) = R\left(\bar{r} = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + \ldots r_N^2}\right)$. Однако, как показывает анализ, подбором соответствующих одномерных моделей удается достичь вполне приемлемых аппроксимаций.

В работе [46] для получения близких к изотропным СП предложено выбирать одномерные фильтры с кратными корнями характеристических уравнений: $1-\sum_{j=1}^{n_k}\alpha_{kj}\lambda_k^j=0$, где $n_k, k=\overline{1\ldots M_k}$ – порядки одномерных авторегрессий.

В настоящей главе решаются задачи синтеза модели N-мерного СП с кратными корнями характеристических уравнений одномерных фильтров и анализа ее вероятностных свойств. Решим сначала эти задачи для одномерной модели.

Рассмотрим одномерную авторегрессию длины M:

$$x_i=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j x_{i-j}+\beta\xi_i,\ i=\overline{1\ldots M}. \qquad (2.5)$$

Здесь $\{\xi_i\}$ – гауссовская последовательность независимых компонент с математическим ожиданием 0 и дисперсией σ_ξ^2. Решение задачи синтеза будет заключаться в том, чтобы по заданным $\frac{1}{\rho}$ – корню характеристического уравнения, n – его кратности и σ_x^2 – требуемой дисперсии поля определить неизвестные коэффициенты авторегрессии $\{\alpha_j, j=\overline{1\ldots n};\ \beta\}$.

В случае с кратными корнями это уравнение можно записать в операторной форме следующим образом:

$$\left(1-\rho z^{-1}\right)^n x_i=\beta\xi_i,\ i=\overline{1\ldots M}, \qquad (2.6)$$

где z^{-1} – оператор сдвига. Учитывая, что действие оператора сдвига на i-й элемент последовательности определяется как $z^{-k}x_i=x_{k-i}$, перепишем (2.6) в явном виде:

$$x_i=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}C_n^j\rho^j x_{i-j}+\beta\xi_i,\ i=\overline{1\ldots M}. \qquad (2.7)$$

Сравнение (2.6) и (2.7) дает возможность записать выражение для коэффициентов $\alpha_j = \alpha_j(\rho, n)$:

$$\alpha_j(\rho, n) = (-1)^{j+1} C_n^j \rho^j, \quad j = \overline{1 \ldots n}. \tag{2.8}$$

Значение неизвестного параметра β, являющегося коэффициентом усиления в передаточной функции (2.2), должно выбираться так, чтобы фильтр был устойчив. Далее будет показано, как можно определить β на основе КФ модели.

Одной из задач статистического анализа модели, является получение ее КФ. Найдем вначале нормированную КФ, т.е. будем полагать $\sigma_x^2 = \sigma_\xi^2 = 1$. Для решения этой задачи воспользуемся формулой (2.4), записанной для одномерного случая

$$R(k) = \frac{\beta^2}{2\pi i} \oint\limits_{C_1} \frac{z^{k-1}}{(z-\rho)^n (z^{-1}-\rho)^n} dz.$$

Так как подынтегральная функция имеет в точке $z = \rho$ полюс порядка n, то интеграл представляет собой коэффициент c_{-n} ее разложения в ряд Лорана, и поэтому может быть найден с использованием методов теории вычетов

$$R(k) = \beta^2 \operatorname*{Res}_{\rho} \left[\frac{z^{k-1}}{(z-\rho)^n (z^{-1}-\rho)^n} \right] = \frac{\beta^2}{(n-1)!} \lim_{z \to \rho} \frac{\partial^{n-1}}{\partial z^{n-1}} \left\{ \frac{z^{n+k-1}}{(1-\rho z)^n} \right\}.$$

Используя правила дифференцирования произведения функций, после предельного перехода получаем

$$R(k) = \beta^2(\rho, n) \rho^k \sum_{\ell=0}^{n-1} g(n, \ell, k) \frac{\rho^{2(n-\ell-1)}}{(1-\rho^2)^{2n-\ell-1}}, \tag{2.9}$$

где

$$g(n,\ell,k)=\frac{(n+k-1)!(2n-\ell-2)!}{\ell!(n-1)!(n-\ell-1)!(n+k-\ell-1)!}, \qquad (2.10)$$

а коэффициент $\beta=\beta(\rho,n)$ находится из условия $R(0)=1$:

$$\beta^2(\rho,n)=\frac{\left(1-\rho^2\right)^{2n-1}}{\sum_{\ell=0}^{n-1}\left(C_{n-1}^{\ell}\rho^{\ell}\right)^2}. \qquad (2.11)$$

Формулы (2.9) – (2.11) дают, при заданных ρ и n, общий вид нормированной КФ одномерной модели (2.5). Для того, чтобы получить КФ при не равных единице дисперсиях σ_x^2 и σ_ξ^2, необходимо домножить правую часть (2.11) на σ_x^2/σ_ξ^2. Тем самым, получаем выражение и для коэффициента β:

$$\beta=\frac{\sigma_x}{\sigma_\xi}\sqrt{\frac{\left(1-\rho^2\right)^{2n-1}}{\sum_{\ell=0}^{n-1}\left(C_{n-1}^{\ell}\rho^{\ell}\right)^2}}. \qquad (2.12)$$

Формулы (2.8) и (2.12) полностью определяют неизвестные коэффициенты одномерной АР-модели (2.5) с кратными корнями характеристических уравнений.

Рассмотрим теперь случай N измерений. Модель СП, при заданной дисперсии σ_x^2, полностью определяется вектором параметров $(\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_N)$ и вектором кратностей $(n_1,n_2,\ldots,n_N)$ характеристических корней.

Пусть многомерное разделимое СП порождается следующими АР-уравнениями, записанными в операторной форме:

$$\prod_{k=1}^{N}\left(1-\rho_k z_k^{-1}\right)^{n_k}x_{\bar{i}}=\beta\xi_{\bar{i}},\ \bar{i}\in\Omega, \qquad (2.13)$$

где N – размерность поля; ρ_k и n_k – параметр и кратность корней модели вдоль k-й оси; Ω – сетка, на которой определено поле X.

Определим коэффициенты авторегрессии для многомерной модели с кратными корнями. Для этого раскроем в (2.13) скобки:

$$\left(\prod_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{n_k}\alpha_{kl} z_k^{-l}\right)x_{\bar{i}} = \beta\xi_{\bar{i}},$$

$$\sum_{j_1=0}^{n_1}\sum_{j_2=0}^{n_2}\ldots\sum_{j_N=0}^{n_N}\alpha_{\bar{j}} x_{\bar{i}-\bar{j}} = \beta\xi_{\bar{i}},\ \bar{i}\in\Omega. \qquad (2.14)$$

Шаблон коэффициентов модели $\{\alpha_{\bar{j}},\ \bar{j}=(j_1, j_2,\ldots, j_N),\ j_k=\overline{1\ldots n_k}\}$ определен на N-мерном параллелепипеде размера $(n_1+1)\times(n_2+1)\times\ldots\times(n_N+1)$. Из (2.13) и (2.14) следует, что коэффициенты $\alpha_{\bar{j}}$ являются произведениями соответствующих коэффициентов α_{kj_k} одномерных авторегрессий вдоль k-й оси:

$$\alpha_{\bar{j}} = \prod_{k=1}^{N}\alpha_{kj_k}, \qquad (2.15)$$

где $\bar{j}=(j_1, j_2,\ldots, j_N),\ j_k=\overline{1\ldots n_k}$. Коэффициент β многомерной модели (2.14) находится аналогично:

$$\beta = \frac{\sigma_x}{\sigma_\xi}\prod_{k=1}^{N}\beta_k, \qquad (2.16)$$

где β_k – соответствующий нормированный одномерный коэффициент.

Таким образом, выражение (2.14) дает общий вид АР-модели многомерного разделимого гауссовского СП, а формулы (2.15) и (2.16) полностью определяют ее коэффициенты, т.е. задача синтеза модели решена. КФ модели (2.14), как уже отмечалось, является произведением КФ соответствующих одномерных авторегрессий:

$$R(\bar{r}) = \prod_{k=1}^{N} R_k(r_k). \qquad (2.17)$$

Для того, чтобы корни характеристического уравнения были действительными, необходимо, чтобы параметр ρ выбирался из диапазона от нуля до единицы.. Чем больше значение ρ, тем более крупные детали появляются на моделируемом изображении, т.е. этот параметр характеризует величину связи между соседними элементами.

Рассмотрим некоторые примеры. Хорошо изученная трехточечная модель Хабиби (1.5) является частным случаем 2-мерной модели (2.14) кратности (1,1), причем значение параметра ρ задает коэффициент корреляции соседних элементов. Легко видеть, что ее КФ, вычисленная по формулам (2.9), (2.17), совпадает с (2.6):

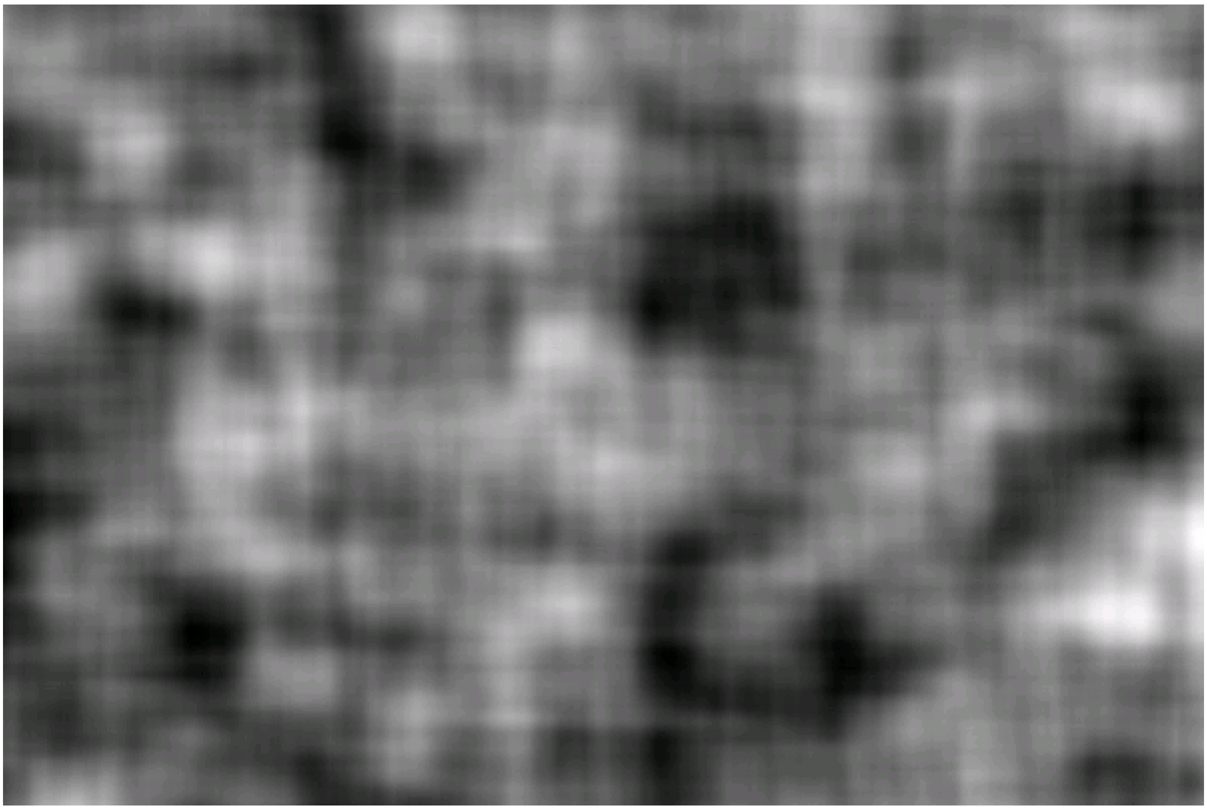
$$R(i,j) = \sigma_x^2 \rho_y^{|i|} \rho_x^{|j|}.$$

Для 2-мерной модели кратности (2,2) КФ записывается более сложно:

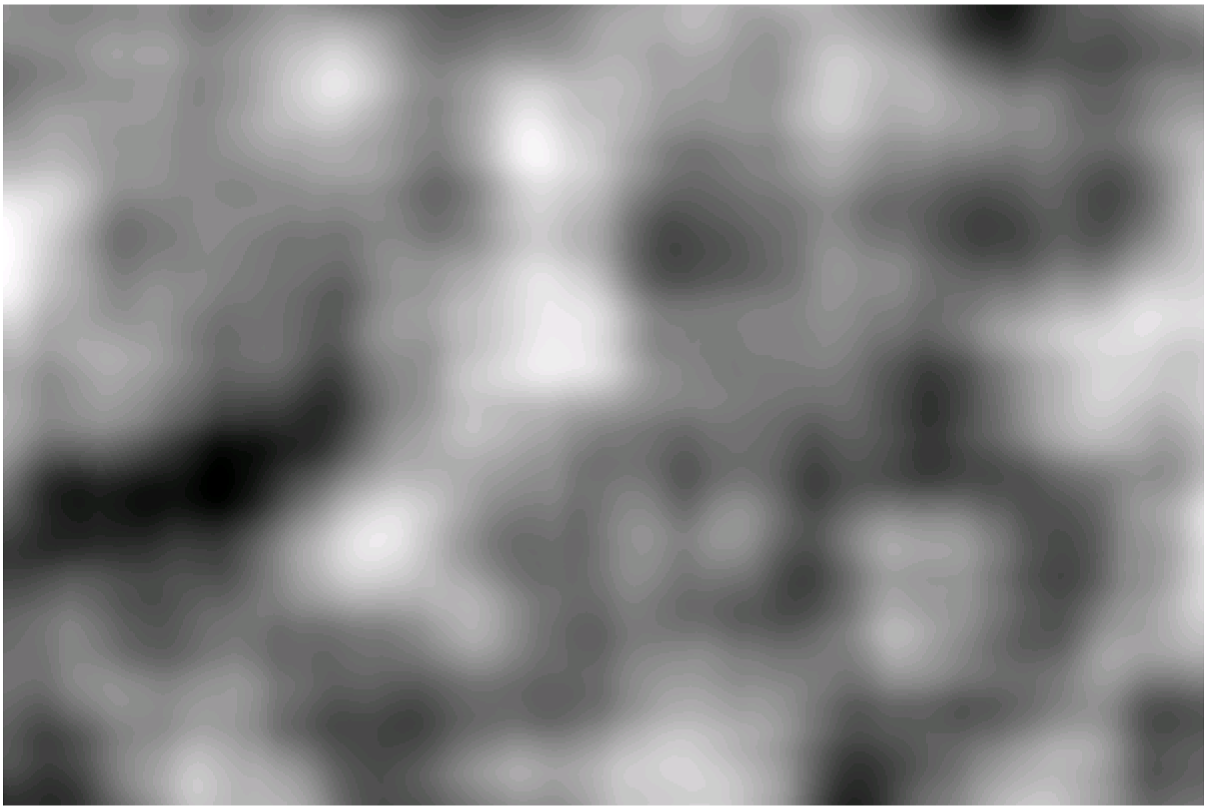
$$R(i,j) = \sigma_x^2 \rho_y^{|i|} \rho_x^{|j|} \left(1 + |i| \frac{1-\rho_y^2}{1+\rho_y^2}\right) \left(1 + |j| \frac{1-\rho_x^2}{1+\rho_x^2}\right),$$

и также совпадает с (1.11), приведенной в первой главе. Вид коэффициентов, согласно (1.10), и рассчитанный по формулам (2.15), (2.16), также одинаков.

На на рис. 2.1, 2.2 и .2.3 приведены кадры изображений размера 600x400 элементов на основе моделей с кратными корнями при различных наборах параметров (первый параметр относится к оси y, второй – к оси x). Анализ приведенных и других результатов показывает, что, варьируя параметры связи и соотношения кратностей, можно получить широкий спектр разнотипных текстур, на основе которых возможно построение комплексных моделей многозональных изображений, причем, с ростом кратности корней, СП приближается по свойствам к изотропному. Это подтверждается также видом сечений равного уровня КФ, приведенных на рис. 2.4.

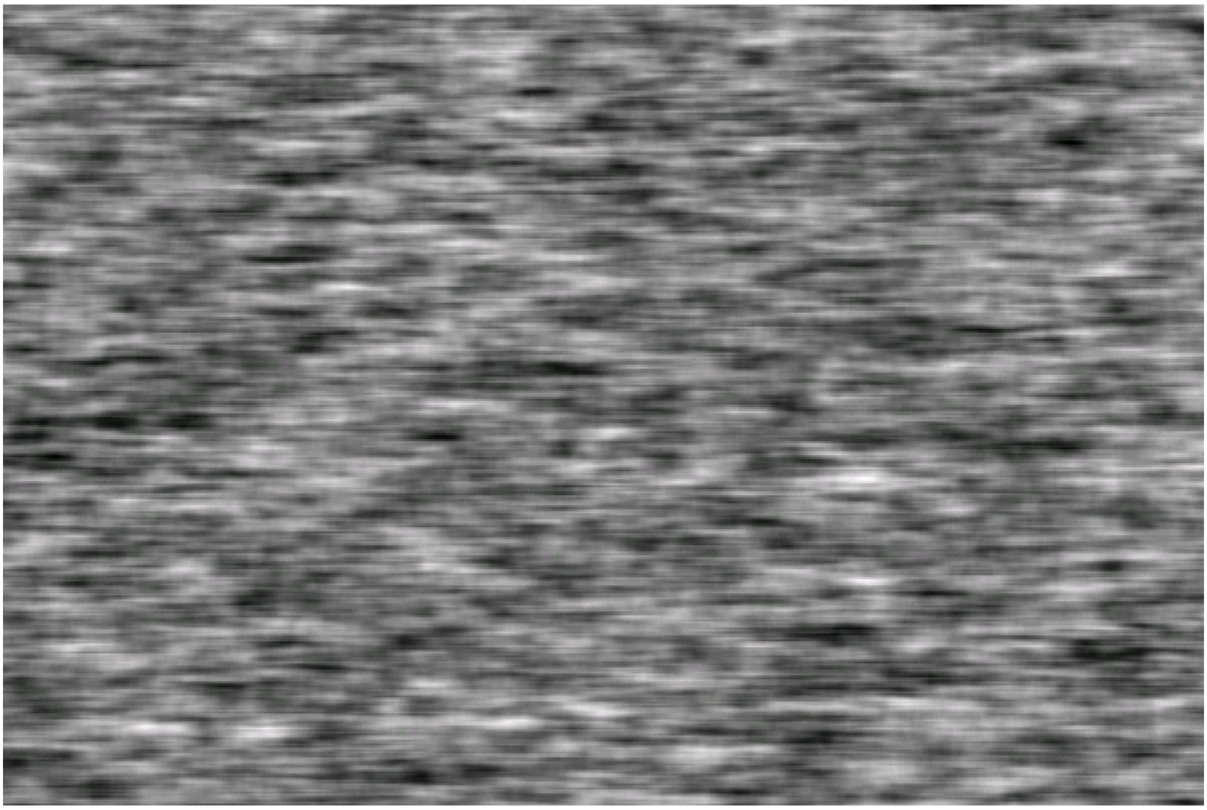


а) кратность (2,2), вектор параметров $(0.95, 0.95)$

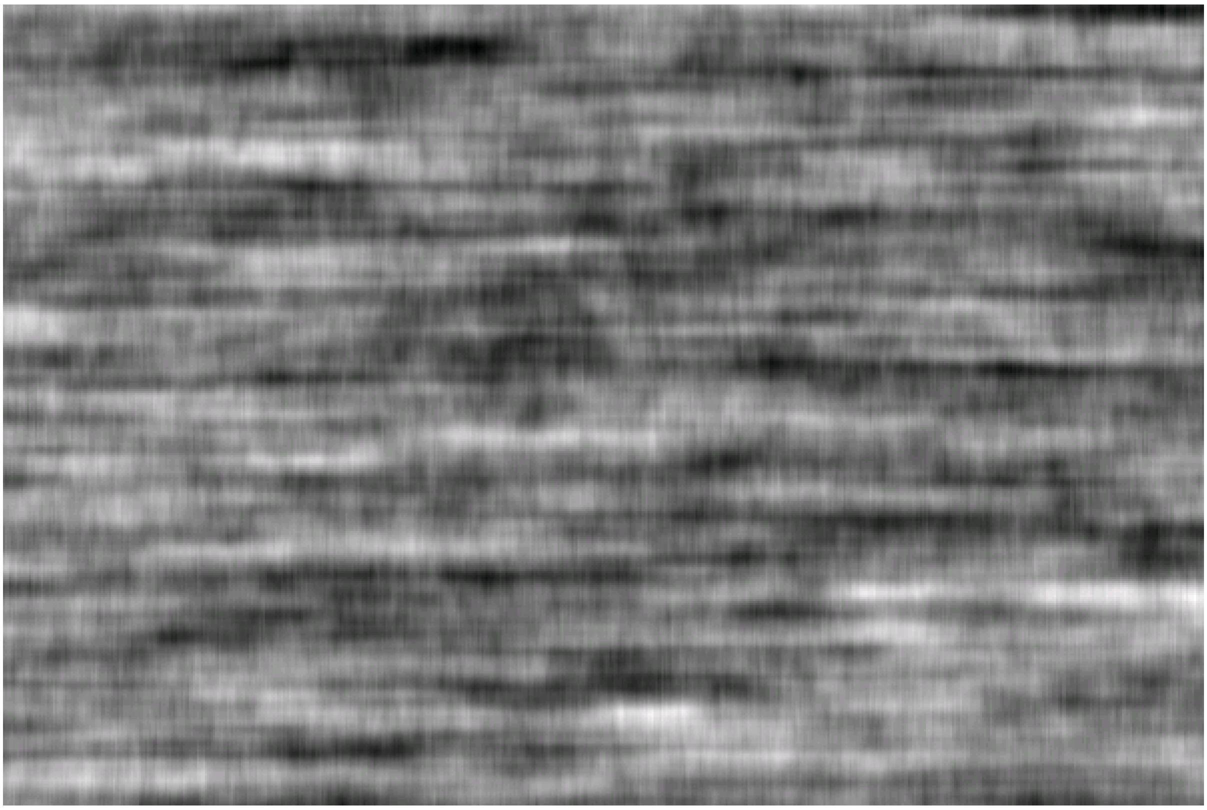


б) кратность (3,3) , вектор параметров $(0.95, 0.95)$

Рис 2.1 Реализации случайных полей на основе авторегрессий с кратными корнями

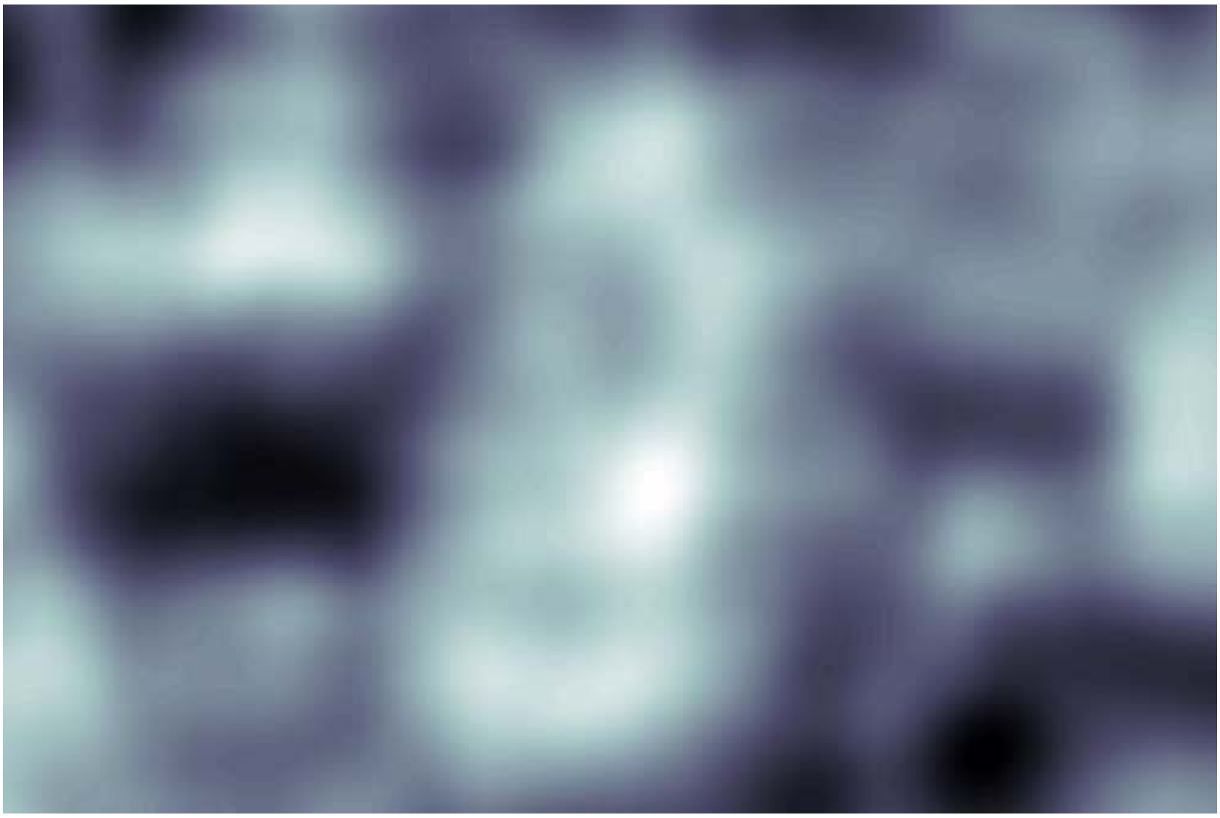


а) кратность (2,2), вектор параметров $(0.95, 0.6)$



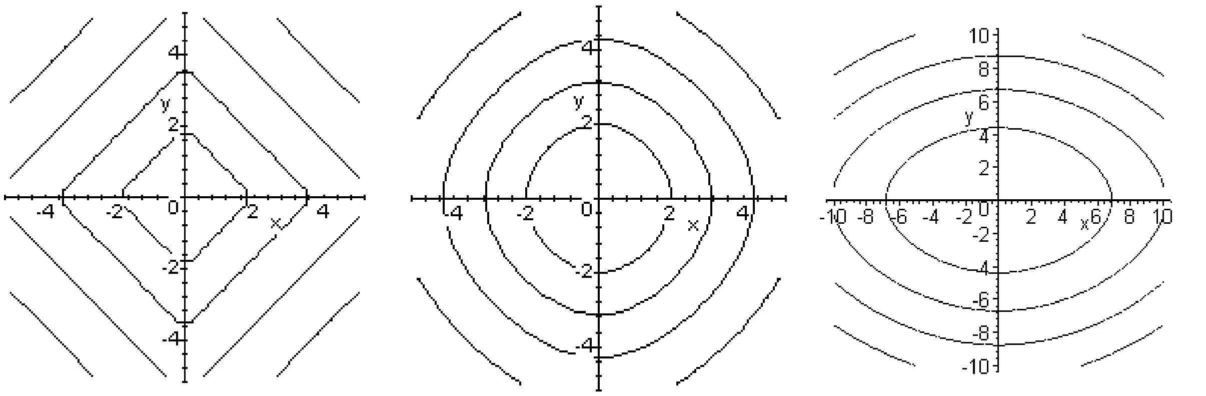
б) кратность (1,3), вектор параметров $(0.99, 0.7)$

Рис 2.2 Реализации случайных полей на основе авторегрессий с кратными корнями



а) кратность (4,4) , вектор параметров $(0.95, 0.95)$

Рис 2.3 Реализации случайных полей на основе авторегрессий с кратными корнями



а) кратность (1, 1), параметры (0.9, 0.9)

б) кратность (3, 3), параметры (0.9, 0.9)

в) кратность (2, 3), параметры (0.9, 0.9)

Рис 2.4 Сечения КФ двумерной модели с кратными корнями

Проведем оценку вычислительной сложности предложенной модели. Для получения реализации N-мерного СП, определенного на сетке размером $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_N$ элементов, требуется $O\left(\prod_{k=1}^{N}(n_k+1)M_k\right)$ операций умножения.

Полезный во многих приложениях вариант модели многомерного СП можно получить, взяв за основу одномерную авторегрессию с кратными корнями. Пусть необходимо сформировать реализации N-мерного СП $X = \{x_{\bar{j}},\ \bar{j} \in \Omega\}$ заданного на сетке $\Omega = \{(\overline{1,M_1}) \times (\overline{1,M_2}) \times \ldots \times (\overline{1,M_N})\}$. Это можно сделать следующим образом: вначале моделируется N одномерных АР последовательностей $\{\vec{x}^k = (x_1^k, x_2^k, \ldots, x_{M_k}^k);\ k = 1 \ldots N\}$ на основе модели с кратными корнями (2.7) ($\vec{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_N)$ – вектор кратностей вдоль соответствующих осей). Далее, элемент $x_{\bar{j}}$ поля X получается перемножением соответствующих элементов одномерных последовательностей:

$$x_{\bar{j}} = \prod_{k=1}^{N} x_{j_k}^k,\ \ \bar{j} = (j_1, j_2, \ldots, j_N) \in \Omega \qquad (2.18)$$

Найдем КФ данной модели. Домножим (2.18) на $x_{\bar{j}+\bar{s}}$, $\bar{j}+\bar{s} = (j_1+s_1, j_2+s_2, \ldots, j_N+s_N)$ и найдем

$$M\{x_{\bar{j}} x_{\bar{j}+\bar{s}}\} = \prod_{k=1}^{N} M\{x_{j_k}^k x_{j_k+s_k}^k\} = \prod_{k=1}^{N} R^k(s_k). \qquad (2.19)$$

Здесь $R^k(\cdot)$ – КФ (2.9) одномерной АР-модели вдоль k-й оси. Таким образом, данная модель является разделимой моделью СП, причем ее КФ совпадает с КФ N-мерной АР-модели с кратными корнями. Закон распределения вероятностей такого СП оказывается негауссовским и, в общем случае N, достаточно сложным. По видимому, именно из-за негауссовости СП и малых значений параметра ρ кадры обладают ярко выраженной осевой структурой, что редко встречается на реальных изображениях (за исключением, может быть, аэрофотоснимков городов). Вместе с тем, предложенная модель отличается простотой и очень малыми вычислительными затратами ($O(M_1 \cdot \ldots \cdot M_N)$ операций умножения). Пример реализации кадра размером 600×400 элементов на основе множительной модели (2.18) приведен на рис. 2.5. Действительно, даже для простейшего случая $N = 2$ одномерная плотность распределения вероятностей (ПРВ) СП находится как ПРВ произведения двух гауссовских СВ в виде [81]:

$$w(x_j) = \frac{1}{\sigma_x^4} K_0\left(\frac{x_j}{\sigma_x^4}\right), \tag{2.10}$$

где $K_0(\cdot)$ – модифицированная функция Бесселя 3 рода 0-го порядка.

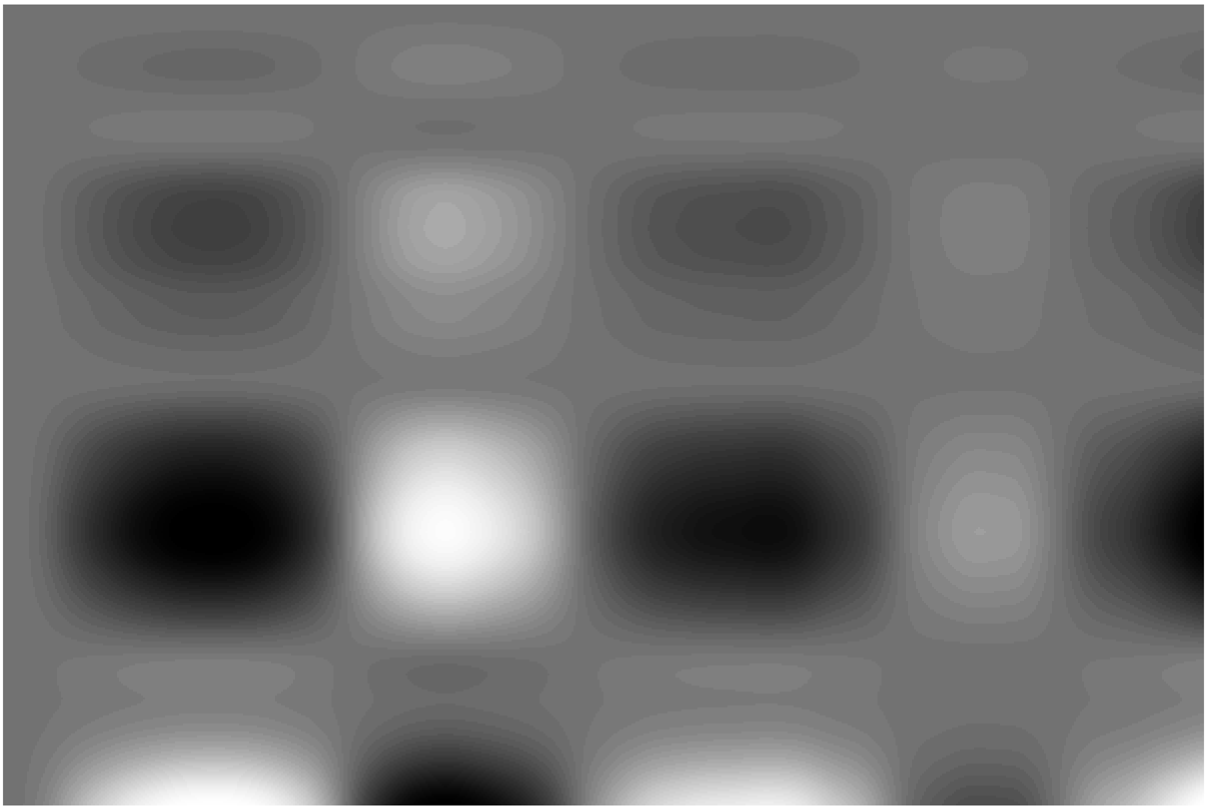


Рис. 2.5 Реализация множительной модели, кратность (4,4) , вектор параметров $(0.95, 0.95)$

2.3 Оценки анизотропии случайного поля

Анализ КФ моделей с кратными корнями показывает, что сечения КФ СП, полученных с помощью разделимых многомерных моделей, с ростом кратности корней характеристических уравнений приближаются к гиперэллипсоидам. Для оценки приближенности таких СП к изотропным желательно иметь количественную оценку анизотропии поля. Для этого можно воспользоваться известным коэффициентом анизотропии двумерного СП [81]:

$$A = \frac{1}{\bar{S}} \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(S(\theta) - \bar{S}\right)^2 d\theta}, \; A \geq 0, \qquad (2.21)$$

где $S(\theta)$ – спектральная плотность поля в направлении θ, $\bar{S} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(\theta) d\theta$ – "среднее значение" углового спектра.

Коэффициент А имеет смысл среднеквадратического расстояния между $S(\theta)$ и $\bar{S}(\theta)$ и характеризует величину суммарного отклонения углового спектра от ее «среднего» значения. Недостатком данного метода оценки изотропности является предположение о том, что спектральная плотность поля $S(\theta)$ в полярных координатах $S(\theta)$ является функцией лишь одной переменной – направления θ, что верно лишь для изотропных полей. Другим недостатком является необходимость вычисления спектральной плотности в полярных координатах, что в рассматриваемом случае вызывает трудности для многих СП.

Поэтому представляется целесообразным характеризовать анизотропность многомерного СП на основе корреляционного расстояния τ в направлении $\vec{u}$:

$$\tau(\vec{u}) = \int_0^{+\infty} R(t\vec{u})dt\,,$$

где $\vec{u} \in S^{N-1}$ – точка на гиперсфере. При этом предлагается следующий коэффициент анизотропии:

$$A_\tau = \frac{1}{\bar{\tau}}\sqrt{\frac{1}{\left|S^{N-1}\right|}\int_{\vec{u}\in S^{N-1}}\left(\tau(\vec{u}) - \bar{\tau}\right)^2 d\vec{u}},\ A \ge 0, \qquad (2.22)$$

где $\bar{\tau} = \frac{1}{\left|S^{N-1}\right|}\int_{\vec{u}\in S^{N-1}}\tau(\vec{u})d\vec{u}$ – «среднее» угловое корреляционное расстояние; $\left|S^{N-1}\right|$ – площадь поверхности гиперсферы.

Достоинствами предложенного коэффициента анизотропии является необходимость знания только КФ поля, и а также возможность его вычисления с применением стандартных численных методов. Значения A_τ, найденные с помощью полученной формулы, для модели (2.14) при $N = 2$, $\rho_y = \rho_x$ и различных соотношения кратностей приведены в табл. 1. Параметры ρ_y, ρ_x в случае различающихся кратностей выбирались, исходя из равенства корреляционных расстояний по обеим осям.

Анализ показывает, что значения коэффициента, близкие к нулю, говорят о высокой степени изотропности поля. Из приведенной таблицы видно, что с увеличением кратности корней модели, при условии соответствующего подбора параметров ρ_y, ρ_x, изотропность поля увеличивается. Наиболее близкие к изотропным реализации получаются при равных по обеим координатным осям кратностях. Как видно из рис. 2.4 и табл. 1, если зафиксировать кратность поля по одной из осей, и увеличивать кратность по другой оси, не изменяя параметров ρ_y, ρ_x, значения коэффициента A_τ растут.

Таблица 2.1

$n_y \backslash n_x$	1	2	3	4
1	0.1232	0.0861	0.0826	0.0772
2	0.0861	0.0443	0.0394	0.0331
3	0.0826	0.0394	0.0270	0.0249
4	0.0772	0.0331	0.0249	0.0194

Преимуществами данной методики оценки изотропности СП являются относительная простота вычисления, а также возможность ее применения на разнообразных выборках реальных данных.

2.4 Методика идентификации моделей на основе экспериментальных данных

На этапе применения описанных моделей к обработке реальных данных возникает задача идентификации параметров. Идентификация одномерных АР-моделей в общем случае описана в литературе, например в [6].

Будем исходить из предположения, что задано многомерное СП, являющееся реализацией некоторой разделимой АР-модели. Ставится задача определения параметров этой модели.

Рассмотрим предлагаемую методику оценивания параметров в двумерном случае. При этом обобщение на СП большей размерности принципиальных трудностей не вызывает. Пусть двумерное СП $\{x_{kl}\}$ описывается следующим АР уравнением:

$$\sum_{i=0}^{n_y}\sum_{j=0}^{n_x}\alpha_{ij}x_{k-i,l-j}=\beta_{kl}\xi_{kl}, \qquad (2.23)$$

где $\{\xi_{kl}\}$ – стандартное порождающее СП. Для нахождения неизвестных коэффициентов α_{ij}, β_{kl} будем следовать основным правилам вывода системы Юла-Уокера для одномерных последовательностей.

Домножим (2.23) на $x_{k-s,l-t}$, $s=0...n_y$, $t=0...n_x$, $(s,t)\neq(0,0)$

$$x_{k-s,l-t}\sum_{i=0}^{n_y}\sum_{j=0}^{n_x}\alpha_{ij}x_{k-i,l-j}=\beta_{kl}\xi_{kl}x_{k-s,l-t},$$

и найдем математическое ожидание:

$$\sum_{i=0}^{n_y}\sum_{j=0}^{n_x}\alpha_{ij}R(i-s,j-t)=0,\ \begin{cases} s=0...n_y \\ t=0...n_x \\ (s,t)\neq(0,0)\end{cases} \qquad (2.24)$$

Полученное выражение представляет собой систему $(n_y+1)(n_x+1)-1$ уравнений относительно неизвестных α_{ij}, причем $\alpha_{00}=1$. Значения КФ $R(\cdot)$ находятся из экспериментальных данных.

Найдем коэффициенты β_{kl}. Для этого возведем (2.23) в квадрат и найдем математическое ожидание:

$$\left(\sum_{i=0}^{n_y}\sum_{j=0}^{n_x}\alpha_{ij}x_{k-i,l-j}\right)\left(\sum_{p=0}^{n_y}\sum_{q=0}^{n_x}\alpha_{pq}x_{k-p,l-q}\right)=\beta_{kl}^2\xi_{kl}^2,$$

$$\sigma_x^2\sum_{i=0}^{n_y}\sum_{j=0}^{n_x}\sum_{p=0}^{n_y}\sum_{q=0}^{n_x}\alpha_{ij}\alpha_{pq}R(p-i,q-j)=\sigma_\xi^2\beta_{kl}^2. \qquad (2.25)$$

Система линейных уравнений (2.24), (2.25) позволяет найти неизвестные коэффициенты α_{ij}, β_{kl} и тем самым полностью определить коэффициенты модели.

Заметим, что для случая N измерений система (2.24), (2.25) уравнений для идентификации параметров модели запишется в виде:

$$\begin{cases}\sum\limits_{i_1=0}^{n_1}\dots\sum\limits_{i_N}^{n_N}\alpha_{i_1i_2\dots i_N}\alpha_{s_1s_2\dots s_N}R(i_1-s_1,i_2-s_2,\dots,i_N-s_N)=0,\\ s_i=0\dots n_i,\ i=1\dots N;\ \bar{s}\neq\bar{0}\end{cases} \qquad (2.26)$$

$$\beta_{kl}^2=\frac{\sigma_x^2}{\sigma_\xi^2}\sum_{i_1,i_2,\dots,i_N}\ \sum_{j_1,j_2,\dots,j_N}\alpha_{i_1i_2\dots i_N}\alpha_{j_1j_2\dots j_N}R(i_1-j_1,i_2-j_2,\dots,i_N-j_N). \qquad (2.27)$$

Отметим, что для того, чтобы система (2.26), (2.27) имела решение, матрица системы должна быть неособенной.

Рассмотрим теперь модель с кратными корнями для двумерного СП. В этом случае

$$\alpha_{ij}=(-1)^{i+j}\rho_y^i\rho_x^jC_{n_y}^iC_{n_x}^j,$$

и нам необходимо определить только четыре параметра – ρ_y, ρ_x, n_y и n_x. Однако система (2.24), (2.25) для кратных корней становится нелинейной относительно неизвестных параметров и решение задачи идентификации требует другого подхода.

Для идентификации моделей с кратными корнями предлагается использовать двухэтапную процедуру, проводимую независимо по каждой из осей. На первом этапе необходимо определить кратности модели по всем осям. Решение задачи нахождения кратности, по существу, является задачей определения порядка авторегрессии. Эта задача может быть решена на основе методики определения порядка авторегрессии одномерной последовательности [11]. Пусть имеется случайная последовательность $\{x_i,\ i=1...N\}$ и известно, что она порождается одномерной АР-моделью

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_i x_{i-j} + \beta_i,$$

где β_i – последовательность независимых стандартных СВ.

В [11] показано, что, если отсчеты k-й разностной последовательности $\{\Delta_i^k = x_{i+1} - x_i,\ i=1...N-k\}$ некоррелированны, то порядок авторегрессии последовательности $\{x_i\}$ равен k. Методика заключается в последовательном вычислении разностей $\{\Delta_i^k\}$ и вычислении их КФ. Как только последовательность перестает быть коррелированной, можно считать, что порядок авторегрессии определен. В случае модели с кратными корнями, знание порядка авторегрессии означает знание кратности модели. В [11] приведены примеры применения данной методики, основанные на принятии статистической гипотезы о некоррелированности отсчетов случайной последовательности.

На втором этапе процедуры производится определение значения параметра ρ. Для этого можно воспользоваться формулой (2.8), из которой следует, что $\alpha_i = (-1)^{i+1} C_n^i \rho^i$, $i = 1,2,...,n$, или $\rho = \sqrt[i]{\frac{\alpha_i}{(-1)^{i+1} C_n^i}}$. Значения коэффициентов α_i могут быть получены на основе выборочных значений КФ, как решение системы Юла-Уокера. Для повышения достоверности можно повторить процедуру для всех значений α_i, $i = \overline{1...n}$, и на основе полученных оценок выбрать наилучшее значение параметра ρ.

Эксперименты показывают, что описанная процедура идентификации обеспечивает приемлемую точность оценки параметров. Так, для различных реализаций модели с кратными корнями ошибка оценки параметра ρ составляла в среднем 5-10%.

Таким образом, применив изложенную методику по каждой из осей, получим полностью идентифицированную многомерную модель СП с кратными корнями.

2.5 Выводы

1. Предложенные многомерные авторегрессионные модели СП с кратными корнями характеристических уравнений позволяют при относительно небольших вычислительных затратах формировать последовательности многомерных изображений, близкие по корреляционным свойствам к реальным многозональным изображениям.

2. Впервые получены аналитические соотношения для вычисления корреляционных функций СП любой размерности при произвольной кратности характеристических корней стохастических разностных уравнений.

3. Предложен и проанализирован простой способ формирования многомерных разделимых СП, основанный на перемножении элементов одномерных случайных последовательностей.

4. Предложена методика оценки степени анизотропности СП, основанная на вычислении среднеквадратического отклонения от среднего углового корреляционного расстояния. На примерах показаны возможности применения этой методики для вычисления степени анизотропности СП.

5. Дано обобщение уравнений Юла-Уокера, обеспечивающее возможности идентификации параметров многомерных авторегрессионных моделей на основе анализа реальных последовательностей кадров многомерных изображений. Также приводится методика идентификации параметров моделей СП с кратными корнями.

3. АЛГОРИТМЫ ФИЛЬТРАЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

3.1 Постановка задачи

Рассмотренные в предыдущей главе модели многомерных изображений позволяют дать адекватное описание сигналов в целом ряде систем извлечения информации. В таких системах, как правило, сигналы передаются по каналам связи, в которых присутствуют помехи. При этом возникает ряд задач обработки сигналов на фоне помех, наиболее сложной из которых является задача фильтрации многомерной последовательности кадров. Строго оптимальное (в смысле минимума дисперсии ошибки) решение задачи фильтрации СП на фоне аддитивной гауссовской помехи известно [2, 23, 34, 35, и др.]. Однако практическая реализация оптимальных алгоритмов связана с большими вычислительными затратами. Это, в частности, не позволяет осуществлять обработку последовательности кадров изображений больших размеров в реальном масштабе времени и, следовательно, известные алгоритмы не могут быть использованы при решении многих практических проблем, например, улучшения непрерывно обновляющихся изображений в системах аэрокосмического мониторинга.

Как было показано в первой главе, известные подходы к созданию рекуррентных процедур оценивания изображений на фоне помех, как правило, значительно проигрывают оптимальным алгоритмам по дисперсии ошибки. Кроме того, известные методы не могут быть непосредственно использованы при обработке многомерных изображений, описываемых предложенными в предыдущем разделе АР СП с кратными характеристическими корнями. В связи с этим возникает задача создания новых классов рекуррентных процедур оценивания последовательностей кадров СП на фоне помех, имеющих малое число операций умножения на один элемент изображения и, вместе с тем, приближающихся по эффективности к оптимальным алгоритмам. Именно эта задача и решается в данной главе диссертации. В п. 3.2 рассмотрены основные идеи построения рекуррентных алгоритмов применительно к простейшей авторегрессионной модели СП кратности $(1,1)$. В п. 3.3 дано обобщение полученных результатов для случая моделей двумерных СП с характеристическими корнями произвольной кратности.

3.2 Квазиоптимальный алгоритм калмановской фильтрации изображений

Случайные поля часто применяются для представления пространственно-временных сигналов в различных информационных системах. При синтезе и анализе подобных систем используются методы оптимального линейного оценивания СП, заданных на многомерных сетках, на фоне аддитивных помех [23]. Строго оптимальное решение этой задачи [35] предполагает применение методов векторной калмановской фильтрации. Однако при этом возникают значительные технические проблемы, связанные с большим числом вычислительных операций при реализации процедур оценивания в реальном масштабе времени. Рассмотрим возможности построения рекуррентных по пространству алгоритмов оценивания, позволяющих значительно сократить число операций при сохранении эффективности, близкой к потенциально-достижимой.

Пусть марковское поле $X=\{x_{ij}\}$ заданно на двумерной сетке $\Omega=\{(i,j):i=\overline{1...M_1},\ j=\overline{1...M_2}\}$ простейшей АР-моделью (2.14) с характеристическими корнями кратности $(1,1)$:

$$x_{ij}=\rho_y x_{i-1,j}+\rho_x x_{i,j-1}-\rho_x\rho_y x_{i-1,j-1}+\xi_{ij},\ (i,j)\in\Omega, \qquad (3.1)$$

где ρ_x,ρ_y – коэффициенты корреляции соседних элементов изображения по строке и столбцу соответственно; $\{\xi_{ij}\}$ – двумерное СП гауссовских СВ с нулевыми средними и дисперсиями $\sigma_\xi^2=M\{\xi_{ij}^2\}=(1-\rho_x^2)(1-\rho_y^2)\sigma_x^2$; $\sigma_x^2=M\{x_{ij}^2\}$. Задача оптимального (в смысле минимума дисперсии ошибки) оценивания x_{ij} рассматривается обычно для аддитивной модели наблюдений:

$$z_{ij} = x_{i,j} + \theta_{ij}, \ (i,j) \in \Omega, \qquad (3.2)$$

где $\{\theta_{ij}\}$ – белое гауссовское поле с дисперсией $\sigma_\theta^2 = M\{\theta_{ij}^2\}$.

В работе [15] задача оценивания двумерного поля X сводится к задаче калмановской фильтрации векторной случайной последовательности. При этом в расширенный вектор состояния $\bar{x}_k$ включаются все элементы k-й строки изображения. Модель (3.1) для этого случая преобразуется к виду:

$$\bar{x}_k = R\bar{x}_{k-1} + V\bar{\xi}_k, \qquad (3.3)$$

где $\bar{\xi}_k$ – вектор некоррелированных гауссовских случайных величин с ковариационной матрицей $V_\xi = VV^T = \left(1-\rho_y^2\right)V_x$; $R = \rho_y E$ – переходная матрица системы; $V_x = M\left\{\bar{x}_k \bar{x}_k^T\right\}$ – корреляционная матрица информационного СП; E – единичная матрица. После перехода к векторной форме модель наблюдений (3.2) запишется следующим образом:

$$\bar{z}_k = \bar{x}_k + \bar{\theta}_k, \ k = \overline{1...M_1}, \qquad (3.4)$$

где $\bar{\theta}_k = (\theta_1, \theta_2 ... \theta_N)^T$. Соотношения (3.3), (3.4) приводят к следующему алгоритму построчной калмановской фильтрации [15]:

$$P_{эk} = RP_{k-1}R^T + V_\xi, \ P_k = P_{эk}\left(E + V_\theta^{-1}P_{эk}\right)^{-1}, \qquad (3.5)$$

$$\hat{\bar{x}}_{эk} = R\bar{x}_{k-1}, \ \hat{\bar{x}}_k = \hat{\bar{x}}_{эk} + P_k V_\theta^{-1}\left(\bar{z}_k - \hat{\bar{x}}_{эk}\right), \qquad (3.6)$$

где начальные условия задаются следующим образом:

$$P_{э1} = V_x, \ \hat{\bar{x}}_{э1} = \bar{0}. \qquad (3.7)$$

В процедуре (3.5) – (3.7) используются векторно-матричные операции, и оценка $\hat{\bar{x}}_k$, получаемая на каждом шаге, является полной строкой изображения. Оценим число элементарных операций умножения на каждом шаге вычислений. Учитывая тот факт, что коэффициенты R и V_θ являются, по существу, скалярами, вычислительная сложность процедуры пересчета матрицы ковариаций ошибок оценивания P_k в (3.5) составляет $O\left(M_2^4 + M_2^3 + M_2^2\right)$ операций умножения, где M_2 – длина строки. При этом основное число операций $O\left(M_2^4\right)$ требуется для вычисления обратной матрицы. Собственно процедура вычисления оценки информационного поля в (3.6) требует $O\left(M_2^2 + 2M_2\right)$ умножений.

Рассмотрим возможности сокращения требуемого числа операций для решения задачи квазиоптимального оценивания двумерного СП. Для этого вначале выпишем элементы $P_{\ell j}^k = M\left\{\varepsilon_\ell^k \varepsilon_j^k\right\}$ матрицы P_k, представляющие собой ковариации ошибок оценивания $\varepsilon_\ell^k = x_\ell^k - \widehat{x}_\ell^k$. Как следует из (3.5), матрица P_k образуется из матрицы $P_{эk}$ с элементами $P_{э\ell j}^k = M\left\{u_{э\ell}^k u_{эj}^k\right\}$, равными ковариациям ошибок экстраполяции $u_{э\ell}^k = x_\ell^k - \widehat{x}_{э\ell}^k$.

Выделим ℓ-й элемент k-й строки изображения и запишем (3.5) в следующей скалярной форме

$$\widehat{x}_\ell^k = \widehat{x}_{э\ell}^k + \widehat{\widehat{u}}_\ell^k, \tag{3.8}$$

где

$$\widehat{\widehat{u}}_\ell^k = V_\theta^{-1} \sum_{j=1}^{M_2} P_{\ell j}^k \left(z_j^k - \widehat{x}_{эj}^k\right). \tag{3.9}$$

Анализ данного выражения показывает, что соотношение (3.9) можно рассматривать как оценку величины u_ℓ^k с помощью оптимального нерекурсивного линейного фильтра (фильтра Винера) [74]. При этом для оценки u_ℓ^k используются разности $y_j^k = z_j^k - \widehat{x}_{эj}^k = x_j^k - \widehat{x}_{эj}^k + \theta_j^k = u_j^k + \theta_j^k$.

Для преобразования винеровской нерекуррентной оценки (3.9) в калмановскую, допустим, что модели состояния и наблюдения для u_ℓ^k записываются следующим образом:

$$\begin{cases} u_\ell = \gamma_\ell u_{\ell-1} + \xi_\ell \\ y_\ell = u_\ell + \theta_\ell \end{cases}, \qquad (3.10)$$

где индекс k опущен для сокращения записи. Для того, чтобы применить к (3.10) процедуру скалярного калмановского оценивания, необходимо определить коэффициенты γ_ℓ и дисперсию порождающего шума $V_{\xi\ell}^2$ на каждом шаге. Это можно сделать, исходя из (3.10) и (3.5). Действительно,

$$M\{u_\ell u_{\ell-1}\} = \gamma_\ell M\{u_{\ell-1}^2\},$$

где $M\{u_\ell u_{\ell-1}\} = P_{э\ell,\ell-1}^k$, $M\{u_\ell^2\} = P_{э\ell,\ell}^k$ – элементы матрицы $P_{эk}$. Отсюда можно определить недостающие параметры модели:

$$\gamma_\ell = P_{э\ell,\ell-1}^k / P_{э\ell-1,\ell-1}^k, \qquad (3.11)$$

$$V_{\xi\ell} = M\{\xi_\ell^2\} = P_{э\ell,\ell}^k - \gamma_\ell^2 P_{э\ell-1,\ell-1}^k. \qquad (3.12)$$

С учетом (3.10) – (3.12) составим уравнения калмановского оценивания u_ℓ, состоящего из двух этапов – фильтрации и последующего сглаживания, соответствующих прямому и обратному ходу алгоритма вдоль строки. Использование двухпроходного алгоритма продиктовано тем фактом, что в оценивании каждого отсчета x_{ij} по формулам (3.5) – (3.7) участвуют все элементы i-й строки изображения, следовательно, оценка производится на основе всех наблюдений $\bar{z}_i$. Поэтому для получения оптимальной оценки с использованием скалярного фильтра необходимо провести интерполяцию полученных прямым ходом оценок при помощи известных процедур, приведенных, например, в работах [2, 74].

Первый этап работы скалярного алгоритма имеет следующий вид:

$$P^{u}_{э\ell} = \gamma^2_{\ell} P^{u}_{\ell-1} + V_{\xi\ell}, \quad P^{u}_{\ell} = P^{u}_{э\ell}\left(1 + V^{-1}_{\theta} P^{u}_{э\ell}\right)^{-1}, \quad (3.13)$$

$$\hat{u}_{э\ell} = \gamma_{\ell} \hat{u}_{\ell-1}, \quad \hat{u}_{\ell} = \hat{u}_{э\ell} + P^{u}_{\ell} V^{-1}_{\theta}\left(y_{\ell} - \hat{u}_{э\ell}\right), \quad (3.14)$$

где $\ell = \overline{1 \ldots M_1}$, и начальные условия задаются в следующем виде:

$$P^{u}_{э1} = P_{э11}, \quad \hat{u}_{э1} = 0,. \quad (3.15)$$

Второй этап предполагает использование значений P^{u}_{ℓ} и $P^{u}_{э(\ell+1)}$, вычисленных на предыдущем этапе:

$$\hat{\hat{u}}_N = \hat{u}_N, \quad (3.16)$$

$$\hat{\hat{u}}_{\ell} = \hat{u}_{\ell} + \left(P^{u}_{\ell} / P^{u}_{э(\ell+1)}\right)\gamma_{\ell}\left(\hat{\hat{u}}_{\ell+1} - \gamma_{\ell}\hat{u}_{\ell}\right), \quad (3.17)$$

где $\ell = M_1 - 1, M_1 - 2, \ldots, 1$.

Для вычисления коэффициентов γ_{ℓ} и $V_{\xi\ell}$ требуются точные значения $P^{k}_{э\ell,\ell}$ элементов матрицы $P^{k}_{э}$. Как показывают эксперименты, значения элементов $P^{k}_{э}$, $k = \overline{1 ... M_2}$ устанавливаются достаточно быстро. Например, при $\rho = 0.9$, $M_2 = 100$ уже на 5 шаге (после оценивания 5 строки изображения) элементы матрицы $P^{k}_{э}$ практически не изменяются. Поэтому коэффициенты γ_{ℓ} и $V_{\xi\ell}$ предлагается вычислять на основе установившегося значения этой матрицы $P^{k}_{э} = P_{э}$.

Таким образом, предлагается использовать следующий квазиоптимальный алгоритм оценивания. Для получения установившегося значения матрицы $P^{k}_{э}$ первые несколько строк изображения оцениваются при помощи векторного фильтра Калмана (3.5) – (3.7). Затем осуществляется рекуррентное по пространству оценивание на основе скалярной процедуры (3.13) – (3.17) и установившихся значений матричных коэффициентов P и $P_э$.

Оценим вычислительную сложность алгоритма (3.13) – (3.17) и выигрыш данной процедуры перед векторным фильтром при условии предварительного пересчета матричных коэффициентов фильтра, то есть, будем сравнивать лишь вычислительную сложность получения оценки по формулам (3.6) и (3.13) – (3.17) соответственно. Для вычисления коэффициентов $\gamma_\ell, V_{\xi\ell}$ на каждом шаге требуется 3 умножения, для прямого прохода алгоритма – 10 умножений, и для обратного прохода – еще 3 умножения. Таким образом, всего для оценки одной строки изображения требуется $O(16M_2)$ умножений. Сравнивая полученную величину с количеством операций для получения векторной оценки (3.6), можно заключить, что выигрыш в числе операций, требуемых для фильтрации одной строки изображения, составляет $O(M_2)$.

Для анализа эффективности предложенных алгоритмов были проведены вычисления на ЭВМ. Результаты, полученные при обработке изображений с помощью двух алгоритмов фильтрации – оптимального и квазиоптимального – представлены на рис. 3.1 – 3.4. На рис. 3.1 показано смоделированное изображение X размером 100×100 элементов. Параметры модели – $\rho_y = \rho_x = 0.9$, $\sigma_x^2 = 1$. На рис. 3.2 показано изображение Z в смеси с реализацией шума с дисперсией $\sigma_\theta^2 = 1$. На рис. 3.3, 3.4 представлены отфильтрованные изображения с помощью оптимальный (рис. 3.3) и квазиоптимального (рис. 3.4) алгоритмов. На рис. 3.5 показаны точные (значки +) и приближенные (значки о) зависимости интегральных невязок u_ℓ и $\widehat{\widehat{u}}_\ell$ от номера элемента для последней строки изображения. Анализ показывает, что относительная ошибка оценивания коэффициентов составляет около 5%.

На рис. 3.6 представлены зависимости дисперсии ошибки фильтрации от номера j элемента в последней строке изображения размером 100x100 элементов при использовании векторного оптимального фильтра (3.5), (3.6) (сплошные линии) и квазиоптимального скалярного алгоритма (3.9), (3.10) (пунктир) при коэффициентах корреляции $\rho_x = 0.9$, $\rho_y = 0.9$ и двух отношениях сигнал/шум $q = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_\theta^2}$. На рис. 3.7, 3.8 показана дисперсия ошибки фильтрации среднего и крайних элементов последней строки. Необходимо отметить, что дисперсия ошибки на рис. 3.6 – 3.8 является потенциально достижимой.

Анализ приведенных данных показывает, что предложенный подход позволяет получить алгоритмы фильтрации изображений, важным достоинством которых является простота технической реализации при весьма незначительном проигрыше перед оптимальными процедурами [72, 77, 96] по величине дисперсии ошибки, не превышающем 3–6%. Вместе с тем, выигрыш в числе арифметических операций по сравнению, например, с аналогичным оптимальным алгоритмом [96], может быть оценен примерно в M_2^2 раз, где M_2 – длина строки изображения.

Несмотря на то, что предложенный алгоритм не является строго оптимальным, можно высказать предположение о том, что соответствующий подбор параметров и порядка АР модели (3.10) позволит получить еще более близкие к оптимальным решения. Тем не менее, следует отметить необходимость дальнейшего изучения идей, положенных в основу данного квазиоптимального алгоритма

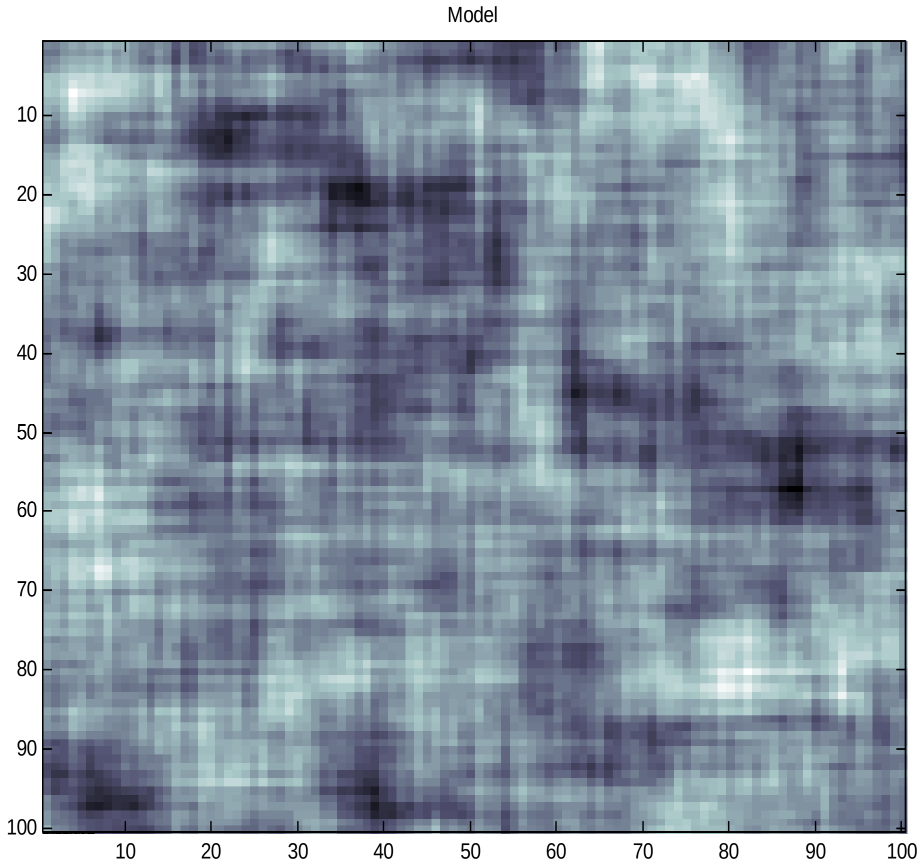


Рис. 3.1 Смоделированное изображение

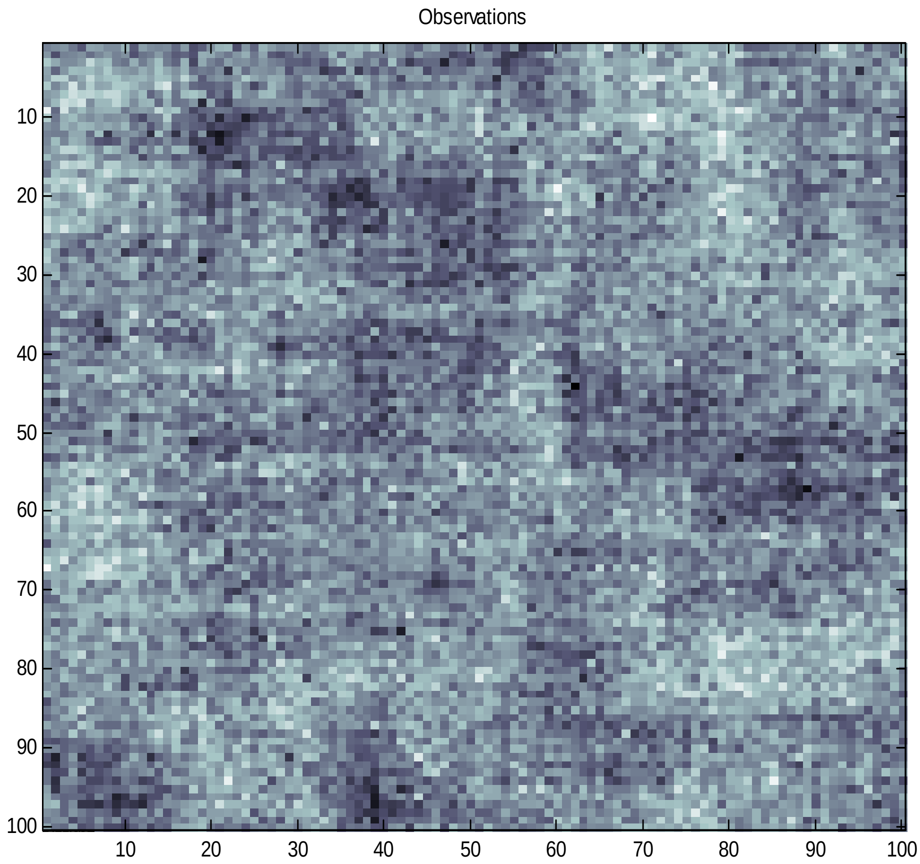


Рис. 3.2 Зашумленное изображение

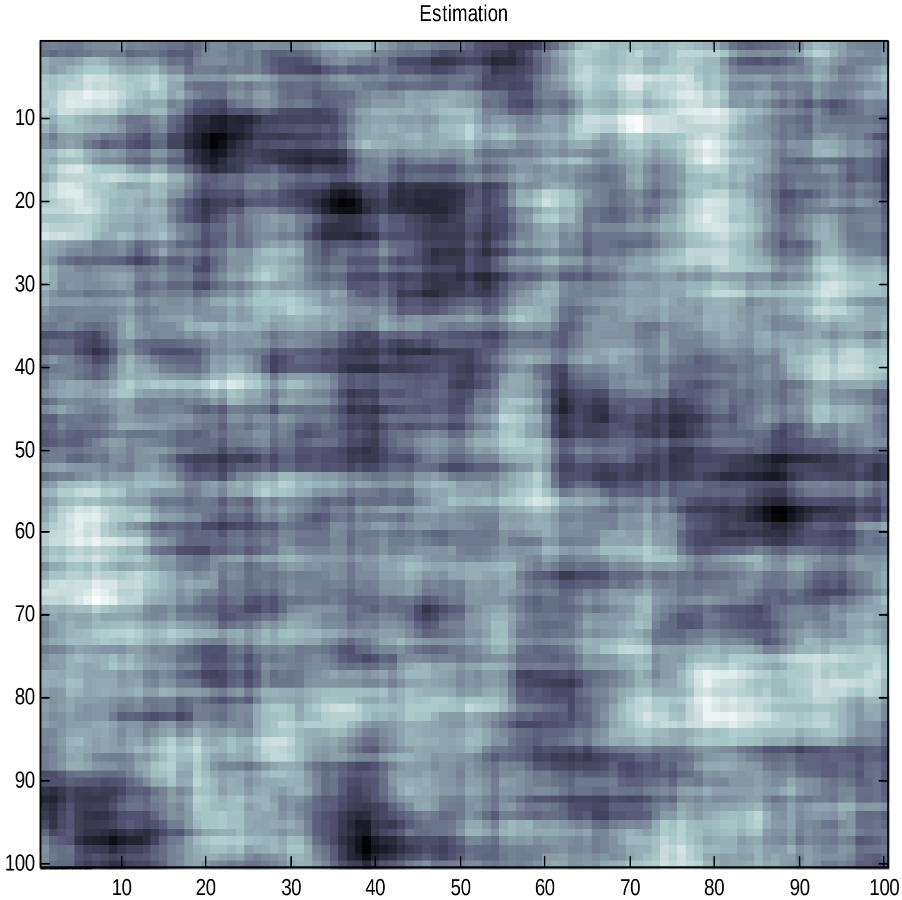


Рис. 3.3 Оптимальная оценка

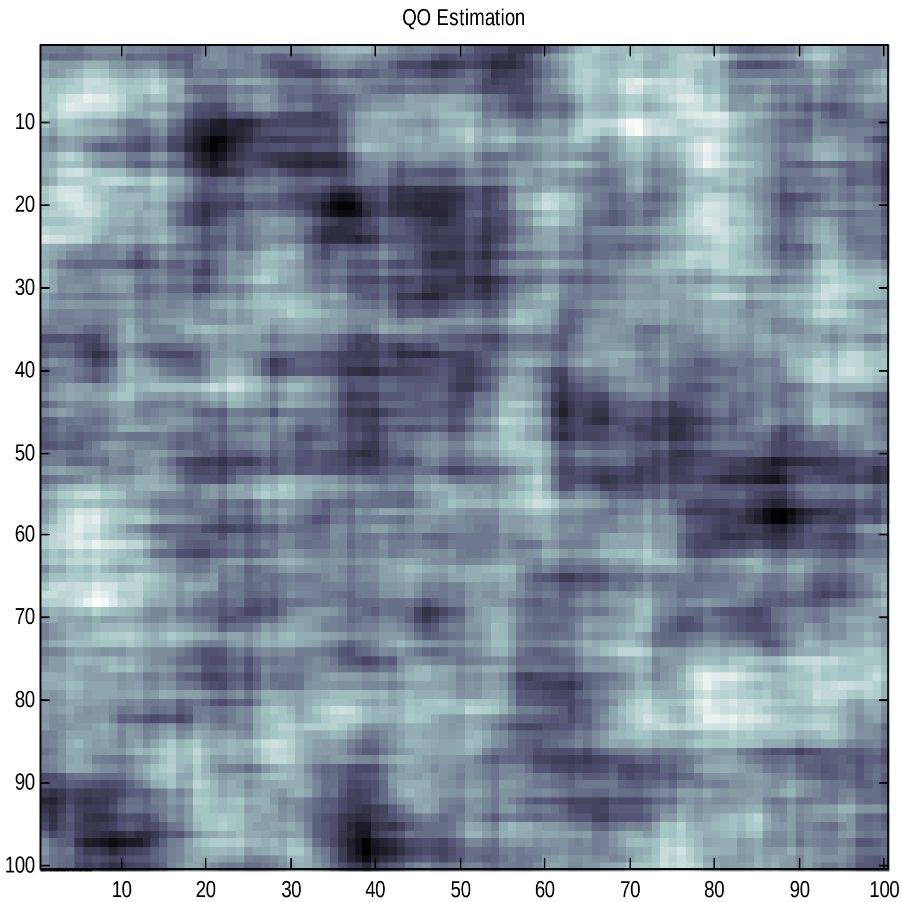


Рис. 3.4 Квазиоптимальная оценка

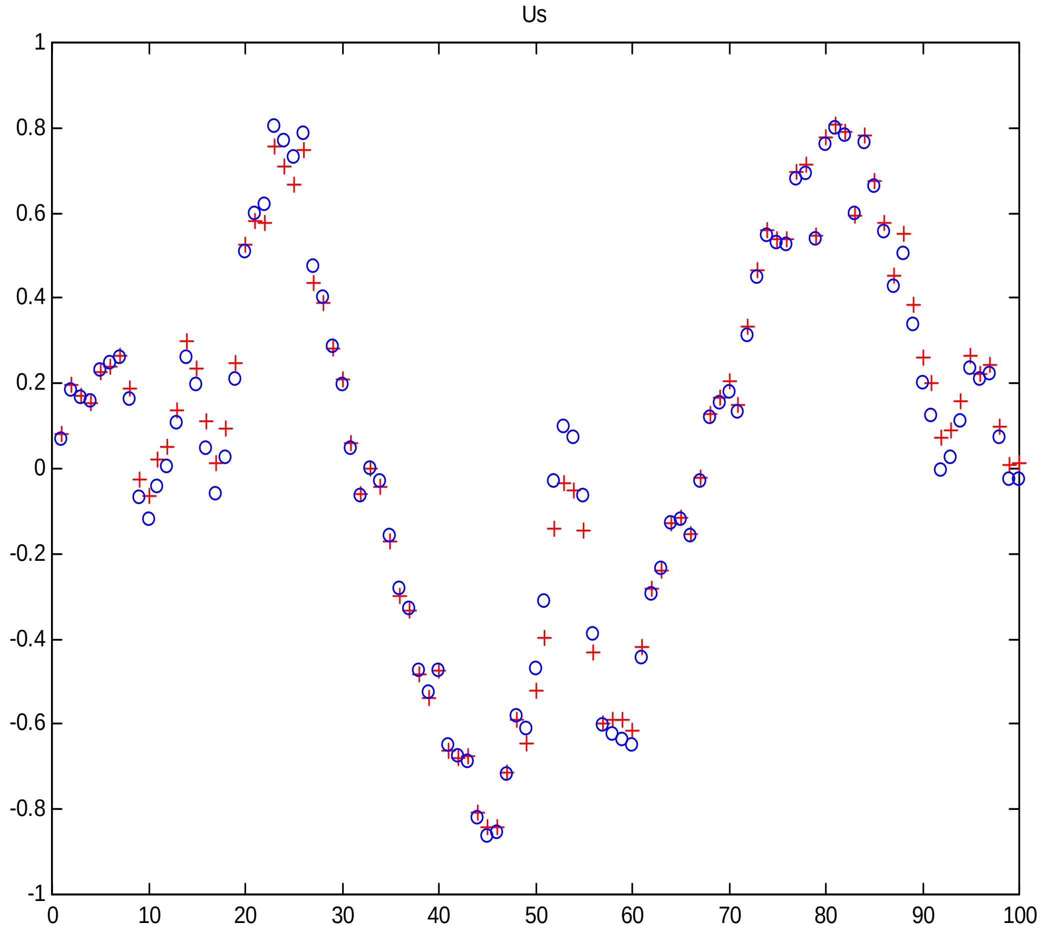


Рис. 3.5 Соотношение интегральных невязок u_ℓ^k и $\hat{\hat{u}}_\ell^k$

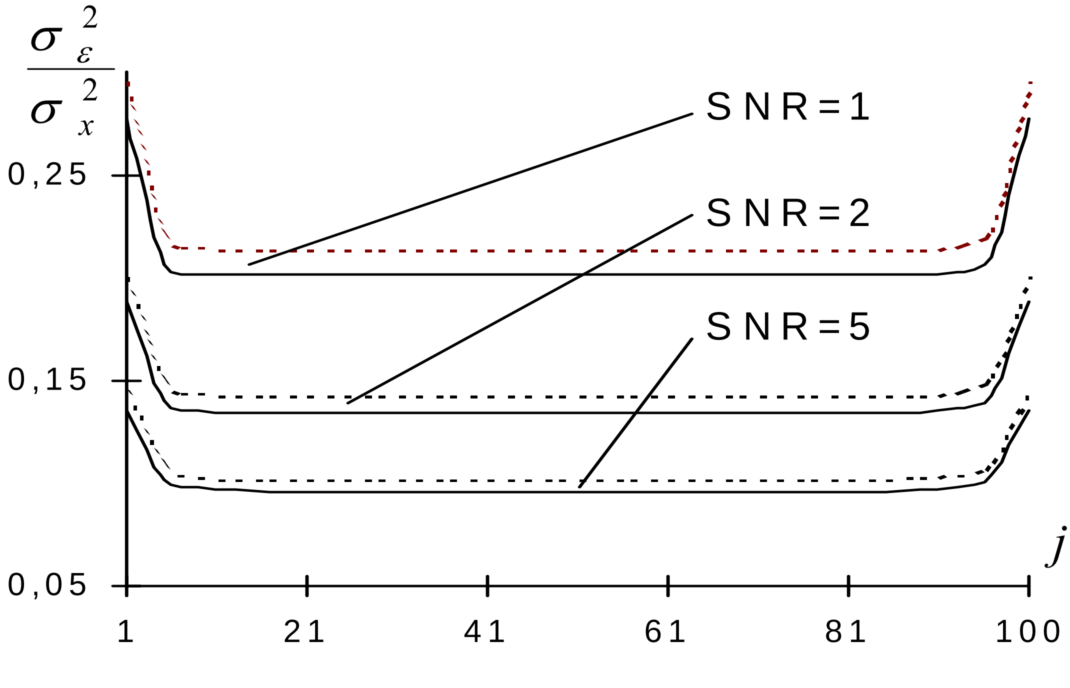


Рис. 3.6 Дисперсия ошибки фильтрации элементов последней строки

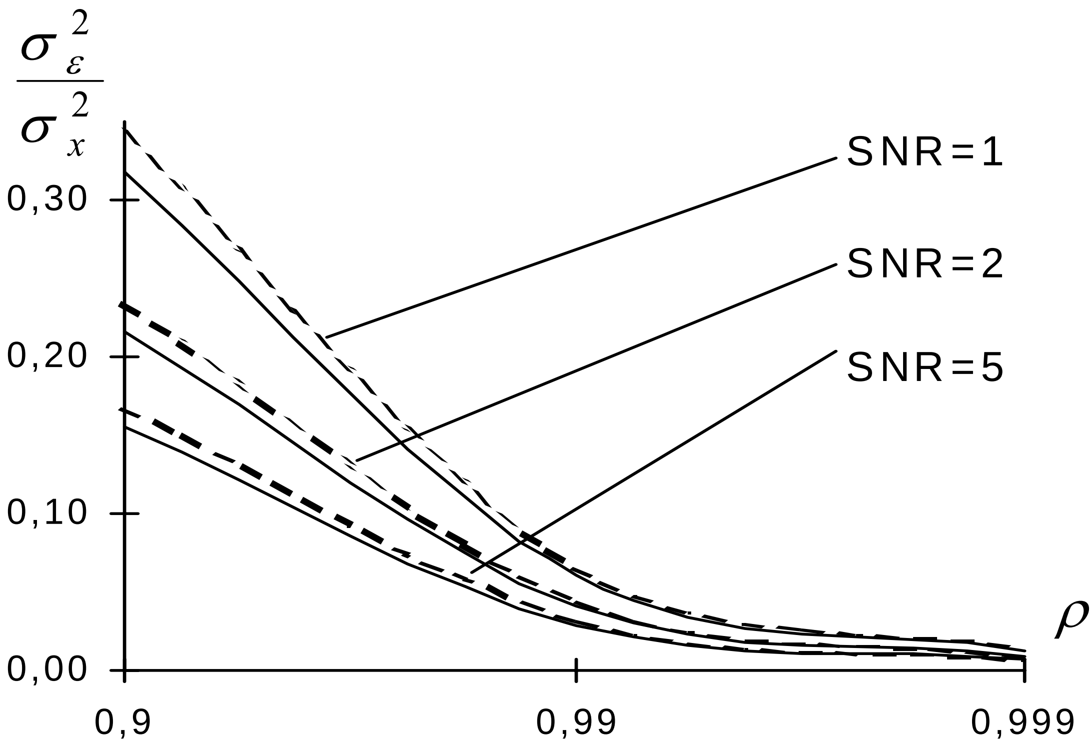


Рис. 3.7 Дисперсия ошибки фильтрации среднего элемента строки

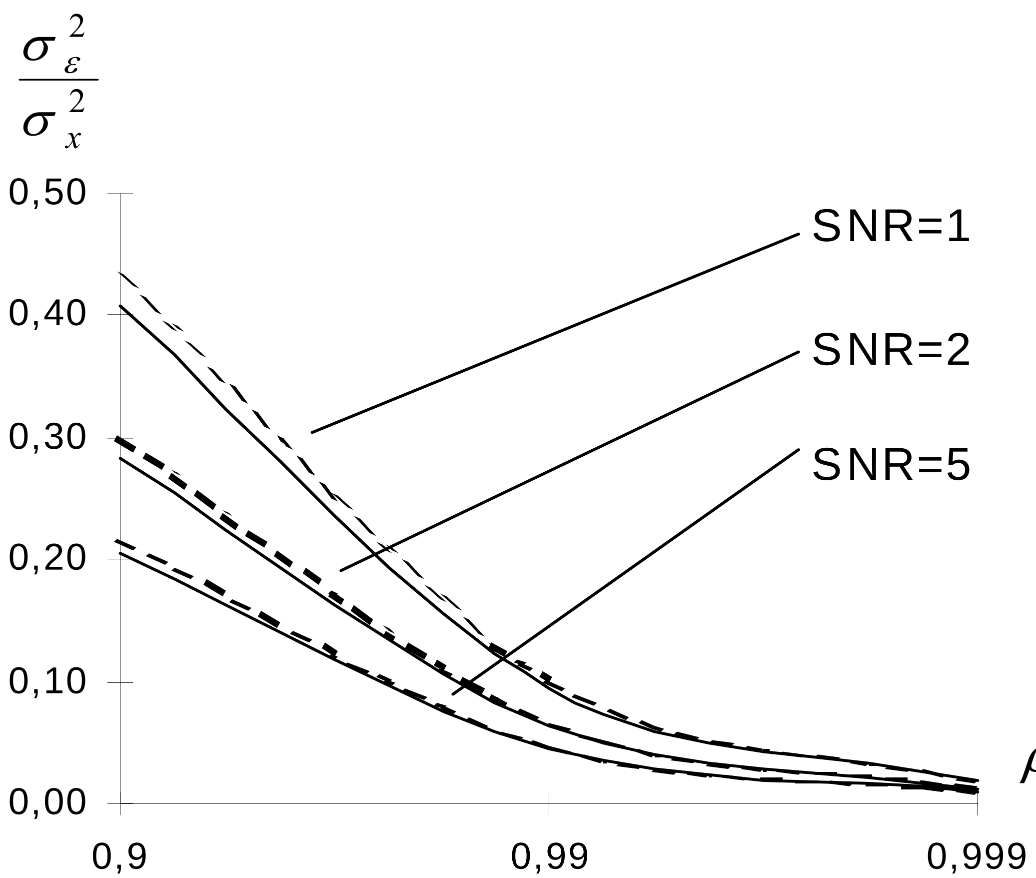


Рис. 3.8 Дисперсия ошибки фильтрации крайних элементов строки

3.3 Алгоритмы оценивания двумерных СП на основе моделей с кратными корнями

В предыдущем параграфе рассматривались оптимальный и близкий к оптимальному алгоритмы оценивания двумерных СП на основе модели кратности $(1,1)$. Для того, чтобы применить методику, изложенную в предыдущем параграфе, для построения алгоритмов фильтрации СП с кратными корнями характеристических уравнений, прежде всего необходимо сформулировать задачу фильтрации кадра в терминах пространства состояний. Для этого нужно решить задачу нахождения обобщенной векторной формы представления данного класса моделей.

Для начала рассмотрим случай кратности 2 по обеим осям. Модель в этом случае должна иметь следующий вид:

$$\bar{x}_k = A\bar{x}_{k-1} + B\bar{x}_{k-2} + V\bar{\xi}_k, \qquad (3.18)$$

где $\bar{x}_k = \left(x_{k1}, x_{k2}, ..., x_{kM_2}\right)^T$ – вектор, содержащий элементы k-й строки; $\bar{\xi}_k = \left(\xi_{k1}, \xi_{k2}, ..., \xi_{kM_2}\right)^T$ – порождающий вектор стандартных СВ; A, B, V – матричные коэффициенты модели; $M_1 \times M_2$ – размер изображения. Таким образом, необходимо определить матричные коэффициенты A, B, V на основании соответствующей модели (2.14) с кратными корнями, таким образом, чтобы они стали эквивалентны.

Для определения элементов неизвестных матриц A, B, V домножим (3.18) на $\bar{x}_{k-1}^T$ справа и найдем математическое ожидание:

$$\bar{x}_k\bar{x}_{k-1}^T = A\bar{x}_{k-1}\bar{x}_{k-1}^T + B\bar{x}_{k-2}\bar{x}_{k-1}^T + V\bar{\xi}_k\bar{x}_{k-1}^T, \qquad (3.19)$$

$$M\{\bar{x}_k\bar{x}_{k-1}^T\}=AM\{\bar{x}_{k-1}\bar{x}_{k-1}^T\}+BM\{\bar{x}_{k-2}\bar{x}_{k-1}^T\}+VM\{\bar{\xi}_k\bar{x}_{k-1}^T\}. \quad (3.20)$$

Пусть $V_{xi}=M\{\bar{x}_k\bar{x}_{k-i}^T\}$ – ковариационная матрица поля $\{\bar{x}_k\}$ на расстоянии i. Очевидно, что, $V_{xi}^T=M\{\bar{x}_{k-i}\bar{x}_k^T\}=M\{\bar{x}_k\bar{x}_{k-i}^T\}=V_{xi}$. Тогда формулы (3.19) и (3.20) принимают следующий вид:

$$V_{x1}=AV_{x0}+BV_{x1},$$

$$AV_{x0}=(E-B)V_{x1}. \quad (3.21)$$

Точно также, после домножения (3.18) на $\bar{x}_{k-2}^T$ получим

$$\bar{x}_k\bar{x}_{k-2}^T=A\bar{x}_{k-1}\bar{x}_{k-2}^T+B\bar{x}_{k-2}\bar{x}_{k-2}^T+V\bar{\xi}_k\bar{x}_{k-2}^T,$$

$$V_{x2}=AV_{x1}+BV_{x0}. \quad (3.22)$$

Умножим теперь (3.18) на $\bar{x}_k^T$:

$$\bar{x}_k\bar{x}_k^T=\left(A\bar{x}_{k-1}+B\bar{x}_{k-2}+V\bar{\xi}_k\right)\left(A\bar{x}_{k-1}+B\bar{x}_{k-2}+V\bar{\xi}_k\right)^T$$

и найдем математическое ожидание

$$V_{x0}=AV_{x0}A^T+BV_{x1}A^T+AV_{x1}B^T+BV_{x0}B^T+VV_{\xi}V^T. \quad (3.23)$$

Здесь $V_{\xi}=M\{\bar{\xi}_k\bar{\xi}_k^T\}$ – матрица дисперсии порождающего поля. Для стандартно распределенных СВ ξ_{ij} она тождественно равна единичной матрице.

Рассмотрим структуру элементов матрицы V_{xi}:

$$V_{xi}=M\{\bar{x}_k\bar{x}_k^T\}=\begin{bmatrix} x_{k1} \\ x_{k2} \\ \dots \\ x_{kM_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{(k-1),1} & x_{(k-1),2} & \dots & x_{(k-1),M_2} \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} x_{k,1}x_{(k-i),1} & x_{k,1}x_{(k-i),2} & \dots & x_{k,1}x_{(k-i),M_2} \\ x_{k,2}x_{(k-i),1} & x_{k,2}x_{(k-i),2} & \dots & x_{k,2}x_{(k-i),M_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{k,M_2}x_{(k-i),1} & x_{k,M_2}x_{(k-i),2} & \dots & x_{k,M_2}x_{(k-i),M_2} \end{bmatrix}=$$

$$=\sigma_x^2\begin{bmatrix} R(i,0) & R(i,1) & \dots & R(i,M_2-1) \\ R(i,1) & R(i,0) & \dots & R(i,M_2-2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R(i,M_2-1) & R(i,M_2-2) & \dots & R(i,0) \end{bmatrix}.$$

Принимая во внимание разделимость модели по координатным осям, можем записать

$$V_{xi}=\sigma_x^2 R_y(i)\begin{bmatrix} R_x(0) & R_x(1) & \dots & R_x(M_2-1) \\ R_x(1) & R_x(0) & \dots & R_x(M_2-2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_x(M_2-1) & R_x(M_2-2) & \dots & R_x(0) \end{bmatrix}$$

.

Матрица в последнем выражении является ковариационной матрицей одномерной модели по строке, т.е. V_{x0}. С учетом этого, полученное выражение может быть переписано в следующем виде:

$$V_{xi}=\sigma_x^2 R_y(i) V_{x0}. \qquad (3.24)$$

Теперь, с учетом последнего выражения, найдем коэффициенты модели A, B, V. Решим систему матричных уравнений (3.22), (3.23) относительно неизвестных A, B:

$$\begin{cases} V_{x1}=AV_{x0}+BV_{x1} \\ AV_{x0}=(E-B)V_{x1} \end{cases}; \qquad \begin{cases} A=R_y(1)\dfrac{1-R_y(2)}{1-R_y(1)^2} \\ B=\dfrac{R_y(2)-R_y(1)^2}{1-R_y(1)^2} \end{cases}.$$

Подставив в полученные выражения значения КФ, получим окончательное решение $\begin{cases} A = 2\rho_y \\ B = -\rho_y^2 \end{cases}$. Таким образом, коэффициенты A и B векторной модели с кратными корнями порядка 2 по обеим осям являются скалярами.

Для того, чтобы полностью определить параметры модели (3.18), необходимо найти еще коэффициент V. Для этого подставим полученные варажения A и B в формулу (3.23) и с учетом того, что $V_\xi \equiv E$, получим:

$$V_{x0} = A^2 V_{x0} + 2ABR_y(1)V_{x0} + B^2 V_{x0} + VV^T,$$

$$VV^T = \left(1 - A^2 - 2ABR_y(1) - B^2\right)V_{x0}. \qquad (3.25)$$

Явное выражение для V можно получить с использованием известного разложения Холесского [31].

Таким образом, все коэффициенты модели (3.18) полностью определены. Теперь необходимо привести (3.18) к виду

$$\bar{y}_l = S\bar{y}_{l-1} + W\zeta_l. \qquad (3.26)$$

Это может быть сделано следующим образом. Включим в вектор состояния $\bar{y}_l$ две строки изображения – k-ю и $(k-1)$-ю: $\bar{y}_l = \left(x_{k1}, x_{k2}, \ldots, x_{kN}, x_{(k-1)1}, x_{(k-1)2}, \ldots, x_{(k-1)N}\right)^T$. С учетом этого перепишем (3.18) в форме (3.26):

$$\left[\begin{array}{c} \bar{x}_k \\ \hline \bar{x}_{k-1} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline E & 0 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} \bar{x}_{k-1} \\ \hline \bar{x}_{k-2} \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c|c} V & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} \bar{\xi}_k \\ \hline \bar{\xi}_{k-1} \end{array}\right]. \qquad (3.27)$$

Таким образом, модель (3.18) полностью построена.

Полученное представление модели СП (3.26) дает возможность применить для фильтрации СП на основе моделей кратности $(2{,}2)$ стандартную калмановскую процедуру фильтрации векторной случайной последовательности. Здесь $\bar{y}_l = \left[\frac{\bar{x}_k}{\bar{x}_{k-1}}\right]$ – вектор состояния, $S = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline E & 0 \end{array}\right]$ – переходная матрица системы; $\bar{\zeta}_l = \left[\frac{\bar{\xi}_k}{\bar{\xi}_{k-1}}\right]$ – вектор некоррелированных стандартных СВ, E – единичная матрица.

Модель наблюдения запишется следующим образом:

$$\bar{o}_k = H\bar{y}_k + \bar{\vartheta}_k,\ l = 1,2,...M_1, \tag{3.28}$$

где $\bar{o}_k = \left(o_{k1}, o_{k2}, \ldots, o_{kM_2}\right)^T$ – строка зашумленного изображения; $\bar{\vartheta}_l = \left(\vartheta_{k1}, \vartheta_{k2}, \ldots, \vartheta_{kM_2}\right)^T$ – белый гауссовский шум с дисперсией V_ϑ, а $H = (E\,|\,0)$ – матрица наблюдения. Соотношения (3.26), (3.28) приводят к следующему алгоритму векторной калмановской фильтрации:

$$P_{lэ} = SP_{l-1}S^T + WW^T,\ K_l = P_{lэ}H^T\left(HP_{lэ}H^T + V_\theta\right)^{-1},\ P_l = (E - K_lH)P_{lэ} \tag{3.29}$$

$$\hat{\bar{y}}_{lэ} = S\hat{\bar{y}}_{l-1},\quad \hat{\bar{y}}_l = \hat{\bar{y}}_{lэ} + K_l\left(\bar{z}_l - H\hat{\bar{y}}_{lэ}\right). \tag{3.30}$$

Вычислительная сложность алгоритма (3.29), (3.30) существенно выше, чем у алгоритма (3.5) – (3.7). Тем не менее, далее будут высказаны предложения по сокращению вычислительной сложности подобных алгоритмов.

Дальнейший анализ приведенных выражений показывает, что возможно обобщение векторной модели (3.26) на случай любой кратности. Пусть заданы $\bar{n} = \left(n_y, n_x\right)$ – кратность корней, и $\bar{\rho} = \left(\rho_y, \rho_x\right)$ – вектор параметров двумерной модели (2.14). Включим в вектор состояния $\bar{y}_l$ n_y строк изображения – с k-й по $(k - n_y + 1)$-

ю: $\bar{y}_l = \left(x_{k1}, \ldots, x_{kM_2}, \ldots, x_{(k-n_y+1)1}, \ldots, x_{(k-n_y+1)M_2}\right)^T$ и перепишем с учетом этого (3.18) в форме (3.26):

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_k \\ \bar{x}_{k-1} \\ \bar{x}_{k-2} \\ \cdots \\ \bar{x}_{k-n_y+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_{n_y-1} & A_{n_y} \\ E & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & E & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & E & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_{k-1} \\ \bar{x}_{k-2} \\ \bar{x}_{k-3} \\ \cdots \\ \bar{x}_{k-n_y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\xi}_k \\ \bar{\xi}_{k-1} \\ \bar{\xi}_{k-2} \\ \cdots \\ \bar{\xi}_{k-n_y+1} \end{bmatrix},$$

(3.31)

где $A_i = \alpha_{yi} E$ – соответствующий коэффициент скалярной модели вдоль оси y.

Найдем теперь коэффициент V. Для этого перепишем (3.31) в векторном виде

$$\bar{x}_k = \sum_{i=1}^{n_y} A_i \bar{x}_{k-i} + V\bar{\xi}_k, \ k = 1 \ldots M_1,$$

и домножим его справа на $\bar{x}_k^T$:

$$\bar{x}_k \bar{x}_k^T = \left(\sum_{i=1}^{n_y} A_i \bar{x}_{k-i} + V\bar{\xi}_k \right) \left(\sum_{j=1}^{n_y} A_j \bar{x}_{k-j} + V\bar{\xi}_k \right)^T.$$

Найдем теперь математическое ожидание от обеих частей:

$$M\left\{\bar{x}_k \bar{x}_k^T\right\} = \sum_{i=1}^{n_y} \sum_{j=1}^{n_y} A_i A_j M\left\{\bar{x}_{k-i} \bar{x}_{k-j}^T\right\} + VM\left\{\bar{\xi}_k \bar{\xi}_k^T\right\} V^T,$$

$$V_{x0} = \sum_{i=1}^{n_y} \sum_{j=1}^{n_y} A_i A_j V_{x0} R_y(i-j) + VV^T.$$

Из последнего равенства получаем:

$$VV^T = \left(1 - \sum_{i=1}^{n_y} \sum_{j=1}^{n_y} A_i A_j R_y(i-j)\right) V_{x0}, \qquad (3.32)$$

причем выражение в скобках представляет собой скаляр. Общий вид коэффициента V может быть получен из (3.32) при помощи разложения Холесского.

Таким образом, обобщенный вид модели с кратными корнями для случая двух измерений полностью определен и мы можем применить для оценивания подобных СП процедуры векторной калмановской фильтрации в форме (3.29) – (3.30).

Увеличение размера вектора состояния влечет за собой увеличение объема вычислений. Тем не менее, можно заметить, что алгоритм (3.29)-(3.30) может быть в значительной степени упрощен. Действительно, во-первых переходная матрица системы S содержит в себе большое количество нулей, а во-вторых, на каждом шаге наблюдается, и, соответственно, оценивается фактически лишь одна строка изображения. Кроме того, пересчет коэффициента усиления (3.29), в силу стационарности модели, может быть осуществлен заранее. Исходя из этих соображений, можно оценить вычислительную сложность алгоритма. Предварительный пересчет матричных коэффициентов фильтра в (3.29) требует $O\left(M_2^4 + \left(3n_y^2 + n_y\right)M_2^3\right)$ элементарных операций умножения, где M_2 – длина строки изображения. При условии предварительного пересчета (3.29), вычислительная сложность оценки одной строки (3.30) будет $O\left(n_y\left(n_y + 1\right)M_2^2\right)$.

Рассмотрим теперь возможность сокращения числа арифметических операций в (3.30) и синтеза квазиоптимального скалярного алгоритма оценивания.

Рассмотрим структуру матрицы усиления K_k. Она состоит из n_y матричных блоков размера $M_2 \times M_2$:

$$K_k = P_k H^T V_\theta^{-1} = V_\theta^{-1} \begin{bmatrix} P_{k,k} \\ \hline P_{k-1,k} \\ \hline \ldots \\ \hline P_{k-n_y+1,k} \end{bmatrix},$$

где $P_{i,j} = M\left\{ \bar{\varepsilon}_i \bar{\varepsilon}_j^T \right\} = M\left\{ \left(\bar{x}_i - \hat{\bar{x}}_i \right) \left(\bar{x}_j - \hat{\bar{x}}_j \right)^T \right\}$ – матрица ковариации ошибок оценивания i-й и j-й строк изображения.

Пусть пересчет установившегося значения коэффициента усиления (3.29) уже осуществлен. В этом случае

$$K = \lim_{k \to \infty} K_k = V_\theta^{-1} \begin{bmatrix} \lim\limits_{k \to \infty} P_{k,k} \\ \hline \lim\limits_{k \to \infty} P_{k-1,k} \\ \hline \ldots \\ \hline \lim\limits_{k \to \infty} P_{k-n_y+1,k} \end{bmatrix} = V_\theta^{-1} \begin{bmatrix} P \\ \hline P \\ \hline \ldots \\ \hline P \end{bmatrix}, \quad (3.33)$$

где P – установившееся значение матрицы ковариации ошибки оценивания одной строки изображения; V_θ – дисперсия шума наблюдения. Поскольку на каждом шаге наблюдаются, и, соответственно, оцениваются лишь первые M_2 элементов вектора $\bar{y}_l$, то для вычисления оценки используется лишь первые M_2 строк матрицы K.

Анализ данного выражения и формулы (3.30) показывает, все соображения, использованные для синтеза квазиоптимального алгоритма фильтрации СП на основе моделей кратности 1, могут быть применены и в данном случае. Действительно, выделим ℓ-ю строку соотношения (3.30) и применим к ней все выше изложенные рассуждения. Очевидно, что и все коэффициенты, определяющие скалярную АР-модель состояния и наблюдения для u_ℓ^k будут верны и в данном случае.

Рассмотрим возможность использования для представления процесса изменения u_ℓ^k авторегрессий более высоких порядков. Допустим, что модель состояния u_ℓ^k записывается следующим образом:

$$u_\ell = \sum_{i=1}^{m} \gamma_{\ell i} u_{\ell - i} + \xi_\ell . \tag{3.34}$$

Для каждого элемента u_ℓ необходимо определить неизвестные параметры $\gamma_{\ell i}$ и дисперсию порождающего шума $V_{\xi\ell}^2$. Для этого домножим (3.34) на u_{l-s}, $s = 1...m$ и найдем математическое ожидание:

$$P_{э\ell,\ell-s} = \sum_{i=1}^{m} \gamma_{\ell i} P_{э\ell-i,\ell-s}, \ \ s = 1...m . \tag{3.35}$$

Полученное выражение представляет собой систему m линейных уравнений относительно неизвестных $\gamma_{\ell i}$. Возведя (3.34) в квадрат, при условии известных $\gamma_{\ell i}$, получим уравнение для нахождения $V_{\xi\ell}^2$:

$$V_{\xi\ell} = P_{э\ell,\ell} - \sum_{i=1}^{m} \sum_{i=1}^{m} \gamma_{\ell i} \gamma_{\ell j} P_{э\ell-i,\ell-j} . \tag{3.36}$$

Из приведенных рассуждений ясно, вычислительная сложность квазиоптимального алгоритма в случае модели с корнями произвольной кратности имеет тот же порядок, что и в случае кратности 1. При использовании в модели (3.34) авторегрессий более высокого порядка, вычислительная сложность вырастает пропорционально порядку авторегрессии.

3.4 Выводы

1. Предложенный квазиоптимальный алгоритм оценивания двумерных СП на основе модели с кратными корнями первого порядка позволяет добиться существенно большей эффективности оценивания изображений, чем известные оптимальные алгоритмы. Данный алгоритм требует примерно в M_2 (длина строки изображения) раз меньше операций умножения, чем оптимальный. Проведенный анализ показал, что дисперсия ошибки фильтрации данного алгоритма отличается от оптимальной не более, чем на 3-5%, а, например, при обычном размере кадра 500x500 элементов, объем вычислений, а, следовательно, и время анализа сокращается по сравнению с оптимальным алгоритмом [96] примерно в 250000 раз, а по сравнению с алгоритмом [15]. – примерно в 500 раз.

2. Переход к обобщенной векторной записи для модели с кратными корнями в двумерном случае позволил применить для ее оценивания известную процедуру векторной калмановской фильтрации. Приведен алгоритм оптимального в смысле минимума дисперсии ошибки оценивания для данного класса 2-мерных СП на фоне аддитивных помех.

3. Предложенный квазиоптимальный алгоритм фильтрации двумерных СП на основе моделей с корнями кратности 1 обобщен на случай произвольной кратности. Анализ показал, что количество требуемых элементарных операций умножения для данного алгоритма также в $O(M_2)$ раз меньше, чем у соответствующего векторного оптимального алгоритма.

4. ОСОБЕННОСТИ ПРОГРАММНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ АЛГОРИТМОВ

4.1 Постановка задачи

В предыдущих разделах решены задачи синтеза и анализа алгоритмов моделирования и фильтрации СП на фоне помех. При этом предложенные рекуррентные алгоритмы выгодно отличаются от известных оптимальных процедур относительно малыми вычислительными затратами. Вместе с тем, практическое применение рекуррентных алгоритмов формирования и обработки СП сопряжено с рядом особенностей, связанных с наличием границ кадров реальных изображений, ограничениями по скорости выполнения операций и объему памяти ЭВМ, а также неполным соответствием реальных изображений принятым при синтезе моделям. Исследованию этих особенностей реальных систем имитации и обработки изображений и посвящен настоящий раздел.

В п. 4.2 представлено описание разработанных программных пакетов для моделирования и фильтрации СП. В п. 4.3 рассмотрены особенности построения подпрограмм моделирования и оценивания СП, связанные с конечными размерами реальных изображений. В заключительном п. 4.4 приведены структуры вычислительных систем, предназначенных для работы в реальном масштабе времени, а также результаты обработки реальных аэрокосмических изображений.

4.2 Программный пакет для моделирования и оценивания СП

Рассмотрим структуру разработанного программного пакета для моделирования и фильтрации СП. Программный пакет состоит из двух основных частей – программы моделирования и фильтрации FILTER, и пакета программ для исследования временных характеристик алгоритмов и вероятностных свойств изучаемых случайных полей – TESTER. Программа FILTER реализована на объектно-ориентированном языке Microsoft Visual C++ и работает на платформе Windows (рис. 6).

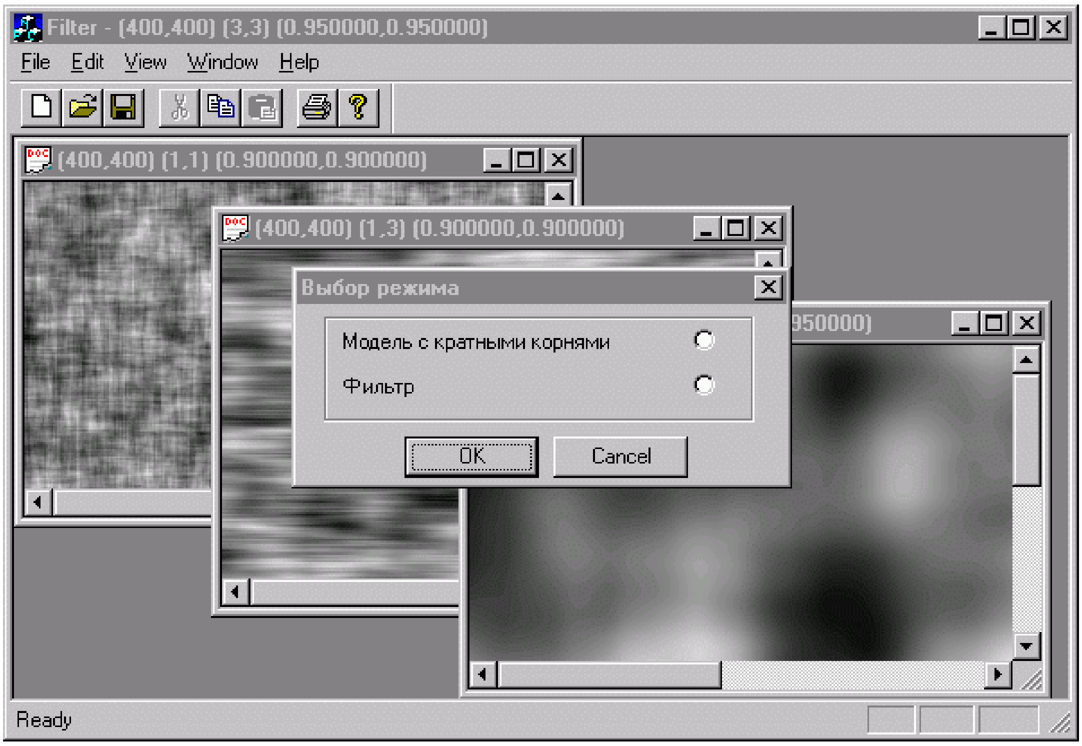


Рис. 4.1 Снимок экрана программы FILTER

Программа FILTER предназначена для решения следующих задач: моделирование отдельных изображений и их последовательностей на основе моделей с кратными корнями;

возможность варьировать параметры моделей в широких пределах; возможность тестирования алгоритмов фильтрации как на реализациях моделей, так и на реальных изображениях; изучение сравнительных временных характеристик алгоритмов моделирования и фильтрации.

Программа FILTER написана на объектно-ориентированном языке Microsoft Visual C++ и работает на платформе Windows. Организация кода имеет расширяемый характер, т.е. имеется возможность дописать собственный алгоритм моделирования или фильтрации и через стандартный программный интерфейс подключить свой код к главной программе. Специально для упрощения реализации векторно-матричных алгоритмов, была написана система классов, реализующая матричные и векторные контейнеры. Для данных классов были реализованы основные операции – векторное и матричное умножение, сложение, вычитание, умножение на скаляр и т.п. Это позволило использовать в программе естественную запись всех алгоритмов, а также значительно упростило процесс проектирования и модификации кода.

Работа с программой происходит в следующем порядке. Вначале пользователь выбирает изображение, с которым он будет работать. Это может быть файл в формате BMP (Windows Bitmap), содержимое буфера Clipboard, или смоделированное самой программой изображение. Графический файл и содержимое Clipboard должно быть представлены в градациях серого цвета. В программе предусмотрена возможность моделирования и сохранения на диск кадров на основе моделей с кратными корнями.

Далее пользователь может добавить к изображению реализации гауссовского белого шума различной интенсивности. После этого зашумленное изображение поступает на вход одного из алгоритмов фильтрации. В программе имеется возможность на всех этапах – для исходного, зашумленного и отфильтрованного кадров – получить выборочные статистические характеристики (среднее, дисперсия, корреляционная функция). Также можно получить такие характеристики качества фильтраци, как матрица ковариации ошибки и собственно ошибка фильтрации.

Пакет программ TESTER реализован при помощи математического пакета MATLAB фирмы MathWorks Inc., работающего в операционных средах Windows и UNIX. По существу он является набором подпрограмм, позволяющим моделировать изображения, фильтровать их, изучать вычислительную эффективность алгоритмов фильтрации, получать различные характеристики алгоритмов фильтрации (дисперсию ошибки оценивания, математическое ожидание, корреляционную и ковариационную функции). Кроме того, в пакете TESTER реализованы предложенные в главе 3 алгоритмы идентификации моделей. Пакет программ TESTER является гибким исследовательским инструментом с легко расширяемыми возможностями.

Исходные тексты обеих программ представлены в приложениях.

4.3 Особенности моделирования и фильтрации изображений на границах

При моделировании многомерных изображений с помощью АР-моделей необходимо решить задачу получения граничных отсчетов. Очевидно, элементы поля на границах поля не могут быть сформированы той же моделью, что и в середине изображения. Между тем, вероятностные характеристики моделируемого однородного поля должны быть одинаковы для всех его областей. Таким образом, оставаясь в классе АР-моделей, необходимо решить задачу определения шаблона коэффициентов модели многомерного СП на его границах таким образом, чтобы сохранялись корреляционные связи между элементами поля.

Область локальных состояний АР-модели должна иметь разную форму в центре поля и на его границах. Вид области локальных состояний для различных элементов двумерного поля, в случае пилообразной развертки при формировании кадра изображения показан на рис. 4.1.

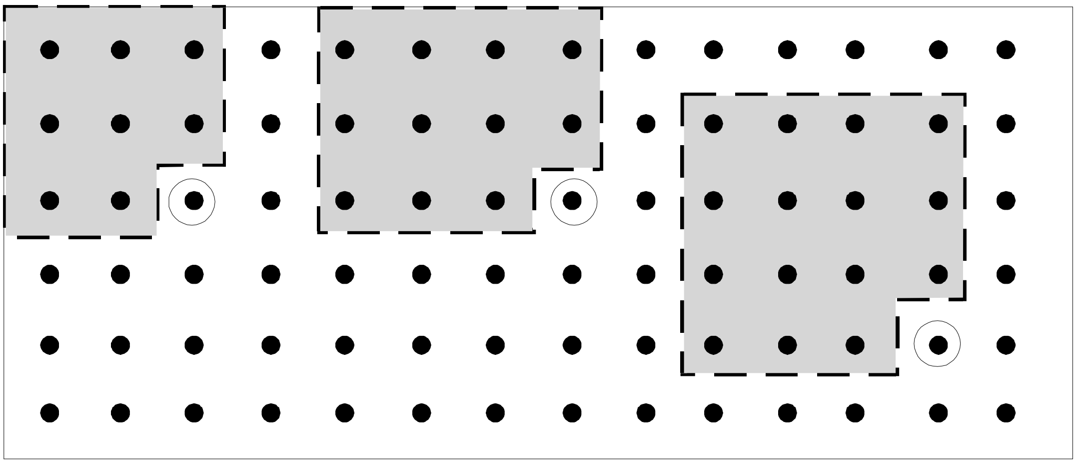


Рис. 4.1. Вид области локальных состояний для различных элементов поля

Очевидно, все поле можно разделить на несколько групп отсчетов, модель формирования которых одинакова. На рис. 4.2 показаны группы таких элементов для АР-модели порядка $(3,2)$. Таким образом, первые n_y строк и n_x столбцов должны формироваться при помощи другой модели.

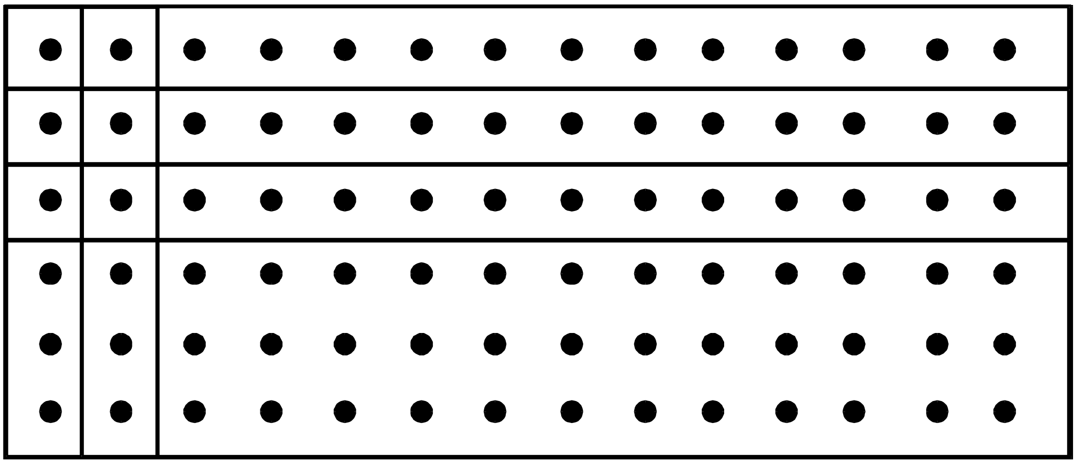


Рис. 4.2. Группы элементов, формируемые с помошью одинакового шаблона коэффициентов

Решим вначале задачу нахождения коэффициентов АР-модели граничных элементов для случая одномерного поля, т.е. случайной последовательности. Рассмотрим АР-модель с характеристическими корнями порядка n:

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i x_{k-i} = \beta_k \xi_k, \qquad (4.1)$$

где $\alpha_i,\, \beta_k,\, k = \overline{1\ldots M}$ – коэффициенты модели; $\{\xi_{kl}\}$ – порождающий гауссовский белый шум. Для удобства дальнейших выкладок отсчеты моделируемого и порождающего полей находятся по разные стороны знака равенства и значение коэффициента α_0 принимается равным 1.

Выражение (4.1) имеет смысл только при $k \geq n+1$ и описывает формирование только серединных элементов последовательности

$\left\{x_k,\, k=\overline{(n+1)\ldots M}\right\}$. Выпишем АР уравнение для формирования элементов $\left\{x_l,\, l=\overline{1\ldots n}\right\}$, соответствующим образом изменив шаблон коэффициентов:

$$\sum_{i=0}^{l-1} \alpha_i^l x_{l-i} = \beta_l \xi_l, \tag{4.2}$$

где $\left\{\alpha_i^l,\, i=\overline{0\ldots l-1}\right\}$, β_l – коэффициенты модели формирования l-го элемента последовательности.

Сначала найдем выражения для коэффициентов $\left\{\alpha_i^l,\, i=\overline{0\ldots l-1}\right\}$. Для этого домножим (4.2) на $x_{l-s},\, s=\overline{1\ldots l-1}$ и найдем математическое ожидание:

$$\sum_{i=0}^{l-1} \alpha_i^l x_{l-i} x_{l-s} = \beta_l \xi_l x_{l-s};$$

$$\sum_{i=0}^{l-1} \alpha_i^l R(i-s) = 0,\; s=\overline{1\ldots l-1}. \tag{4.3}$$

Поскольку корреляционные связи между элементами должны сохраняться, значения КФ $R(\cdot)$ должны задаваться исходной моделью. Поэтому выражения (4.3), с учетом равенства $\alpha_0^l = 1$ можно рассматривать в качестве системы из l линейных уравнений относительно неизвестных $\left\{\alpha_i^l,\, i=0\ldots l-1\right\}$, решая которую можно получить шаблон коэффициентов.

Найдем теперь выражение для коэффициента β_l. Для этого возведем обе части (4.2) в квадрат

$$\left(\sum_{i=0}^{l-1} \alpha_i^l x_{l-i}\right)\left(\sum_{j=0}^{l-1} \alpha_j^l x_{l-j}\right) = \beta_l^2 \xi_l^2,$$

и найдем математическое ожидание

$$\sigma_x^2 \sum_{i=0}^{l-1} \sum_{j=0}^{l-1} \alpha_i^l \alpha_j^l R(i-j) = \sigma_\xi^2 \beta_l^2 . \qquad (4.4)$$

Формула (4.4), при известных $\{\alpha_i^l\}, \{\alpha_j^l\}$, дает выражение для β_l. Таким образом, система линейных уравнений (4.3), (4.4) позволяет найти неизвестные коэффициенты $\{\alpha_i^l,\ i = 0 \ldots l-1\}$, β_l и, тем самым, полностью определить коэффициенты модели для начальных элементов АР последовательности (4.1).

Как было показано в главе 2, коэффициенты шаблона многомерной разделимой АР-модели получаются перемножением соответствующих коэффициентов одномерных моделей. Поскольку корреляционные связи между элементами поля и его разделимость по координатным осям сохраняются, то это верно и для модели граничных элементов поля. Поэтому коэффициенты N-мерного шаблона АР-модели граничных элементов разделимого СП являются произведениями соответствующих коэффициентов одномерных шаблонов.

Анализ приведенных выражений показывает, что общая вычислительная сложность алгоритма моделирования с применением предложенной методики имеет тот же порядок, что и оценка сложности моделирования в общем случае, т.е. $O\left(\prod_{i=1}^{N}(n_i+1)M_i\right)$, где n_i – кратность и M_i – размер СП вдоль i-й оси. Действительно, хотя требуется дополнительное количество операций на решение системы (4.3), (4.4), размер граничных шаблонов меньше, чем размер основного шаблона коэффициентов, кроме того, объем граничной области значительно меньше объема всего поля.

Таким образом, для формирования реализаций разделимых АР-моделей многомерных СП предлагается использовать следующую методику: на первом этапе моделировать однотипные группы граничных отсчетов, каждую с применением своего шаблона коэффициентов (в случае двумерного кадра это будут группы элементов, показанные на рис. 4.2); на втором этапе формировать основную центральную часть кадра. Данная процедура позволяет получить однородный участок поля, как бы «вырезанный» из более широкого СП, заданного на бесконечной дискретной сетке.

Остановимся теперь на особенностях реализации предложенных алгоритмов фильтрации на границах кадра. Необходимо отметить, что данная проблема является, по существу, задачей корректного «старта» алгоритма. Запись всех выше приведенных процедур верна лишь оценивания отсчетов, лежащих в середине кадра. Рассмотрим методику построения «стартовой» процедуры для предложенных алгоритмов оценивания.

Алгоритмы оценивания, описанные в 3-м разделе, имеют строчно-ориентированный характер, т.е. на каждом шаге производится оценка отдельной строки изображения. «Старт» алгоритма оценивания, таким образом, заключается в том, чтобы получить оптимальные оценки верхних строк кадра (при условии пилообразной развертки изображения). Очевидно. их оценка должна производиться на основе модели формирования граничных элементов. Отметим, что построчный алгоритм фильтрации (3.23)-(3.27) обеспечивает получение оптимальной оценки всей строки, а значит и элементов, лежащих в левых, граничных столбцах. Таким образом, необходимо построить только алгоритм оптимальной оценки верхних граничных строк.

Оптимальная оценка первой строки может быть получена при помощи скалярного калмановского фильтра случайной последовательности. На первом проходе производится фильтрация значений элементов первой строки, на втором – полученные оценки интерполируются в обратном направлении.

Заметим, что алгоритм фильтрации СП (3.23) - (3.27) не требует, чтобы модель поля была именно моделью с кратными характеристическими корнями. Он применим для любой разделимой АР-модели, т.е. модели, шаблон коэффициентов которой формируется перемножением соответствующих одномерных шаблонов. Задав на основе системы (4.2), (4.3) порядки авторегрессии и шаблоны коэффициентов по обеим осям, можно записать матричные коэффициенты уравнений состояния и наблюдения (3.26), (3.28). Далее соответствующим образом пересчитывается коэффициент усиления K_k и производится оценка текущей строки. Так как на каждом шаге порядок авторегрессии модели по оси y увеличивается, соответственно, увеличивается и размерность всех матриц.

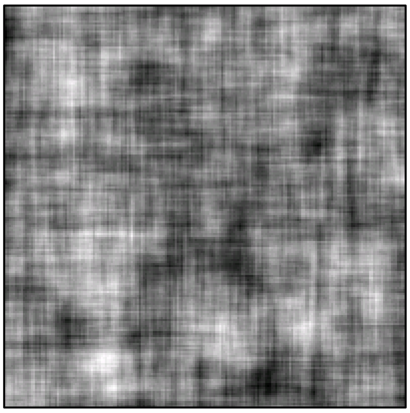
Таким образом, предлагается следующая методика фильтрации двумерных СП на основе моделей с кратными характеристическими корнями. Первая строка изображения оценивается сглаживающим калмановским скалярным фильтром. Затем каждая граничная строка с 1-й по n_y-ю оценивается векторным калмановским фильтром (3.23) - (3.27), основанным на соответствующей модели этой строки. И, наконец, остальные строки оцениваются на основе АР-модели с корнями кратности (n_y, n_x).

4.4 Применение предложенных алгоритмов

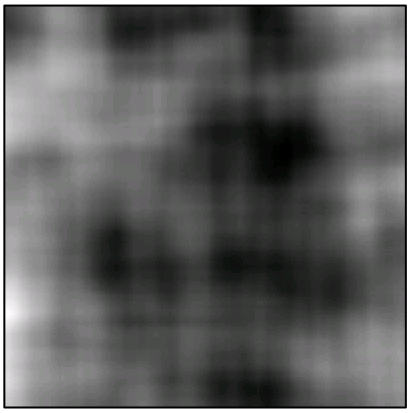
Предложенный в диссертации класс авторегрессионных моделей изображений позволяет получать СП с разнообразными статистическими характеристиками. Как было показано во 2-м разделе, варьируя параметры модели, можно получить широкий диапазон как близких к изотропным, так и существенно неизотропных СП. Данная модель может найти применение для решения многих прикладных задач.

Одним из очевидных применений может быть генерация разнотипных текстур. На рис. 4.3 приведены примеры таких текстур. Видно, что соответствующим выбором параметров можно добиться сходства с изображением древесины, воды, облачного покрова, гористой местности и т.п. При помощи моделей многозональных изображений можно моделировать кадры, состоящие из нескольких разных по свойствам областей, таких как, например, граница суши и морской поверхности.

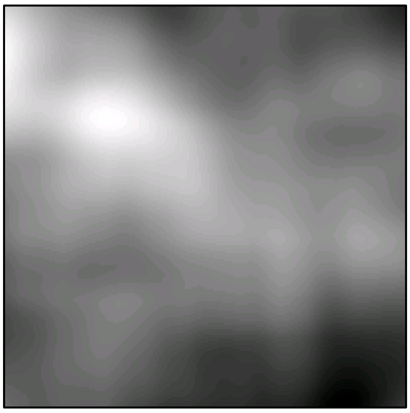
Перспективным направлением дальнейших исследований является синтез адаптивных алгоритмов фильтрации подобных многомерных СП. Такие алгоритмы могли бы найти применение в системах обработки многозональных изображений или неоднородных сигналов. Построение таких алгоритмов возможно на основе использования идеи совместной фильтрации и идентификации. Другим вариантом может быть принятие многоальтернативной гипотезы о выборе параметров фильтра. Идеи, изложенные при синтезе квазиоптимальных алгоритмов оценивания в третьей главе, также могут найти применение в решении этой задачи.



а) кратность (1, 1), параметры (0.95,

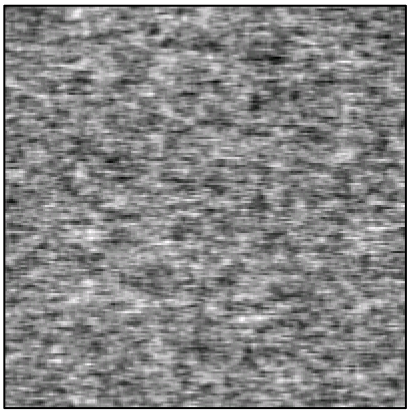


б) кратность (2, 2), параметры (0.95,

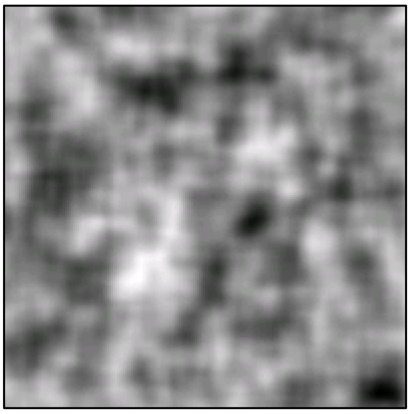


в) кратность (3, 3), параметры (0.95,

г) кратность (3, 1), параметры (0.9, 0.9)



д) кратность (1, 3), параметры (0.9, 0.5)

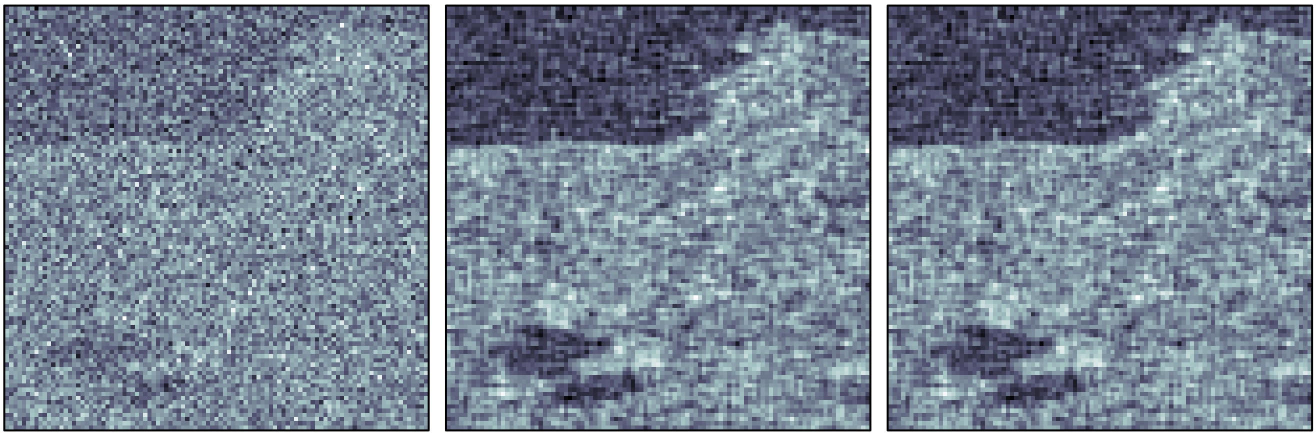


е) кратность (3, 3), параметры (0.9, 0.9)

Рис. 4.3 Примеры текстурных изображений на основе моделей с кратными корнями

Еще одним перспективным направлением развития идей диссертационной работы является разработка квазиоптимальных алгоритмы оценивания для изображений, заданных на N-мерной сетке. Можно оценить сокращение числа вычислительных операций для таких процедур. Если область определения СП имеет размер $K = M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_N$ элементов, то сокращение вычислитеьной сложности по сравнению с аналогичным оптимальным тензорным алгоритмом составлит не менее $K \Big/ \max\limits_{1 \le l \le M_l} M_l$ раз при любых кратностях корней характеристических уравнений.

Для того, чтобы исследовать эффективность предложенных алгоритмов оценивания в приложении к фильтрации реальных зашумленных изображений, был проведен ряд экспериментов. Результат фильтрации фрагмента спутникового снимка поверхности



а) зашумленное изображение б) оптимальная оценка в) квазиоптимальная оценка

Рис. 4.4 Результат работы предложенных алгоритмов на реальных изображениях

Земли размером 100×100 элементов приведен на рис. 4.4. Отношение сигнал/шум было приближенно оценено в 2-3 раза. Фильтрация производилась на основе модели кратности 1 по обеим осям. Параметры модели были идентифицированы по методике предложенной в разделе 2: $\rho_y = \rho_x = 0.87$. Изображение разделено примерно на две однородных области, причем эта неоднородность практически не сказалась на результате фильтрации. Видно, что оценка имеет характерные вертикальные и горизонтальные полосы, что объясняется применением модели кратности 1, КФ которой существенно анизотропна. Тем не менее, качество оценки вполне удовлетворительно.

Как было показано, модели СП с кратными корнями очевидным образом обобщаются на случай N измерений. Подобные модели могут найти применение, например, для моделирования последовательности кадров аэрофотосъемки, для чего можно воспользоваться моделью трехмерного СП, причем кратность модели вдоль временной оси выбрать равной единице, а коэффициент межкадровой корреляции выбирать, исходя из частоты поступления кадров. На рис. 4.5 приводятся три последовательных кадра подобной модели, полученные с помощью программы FILTER.

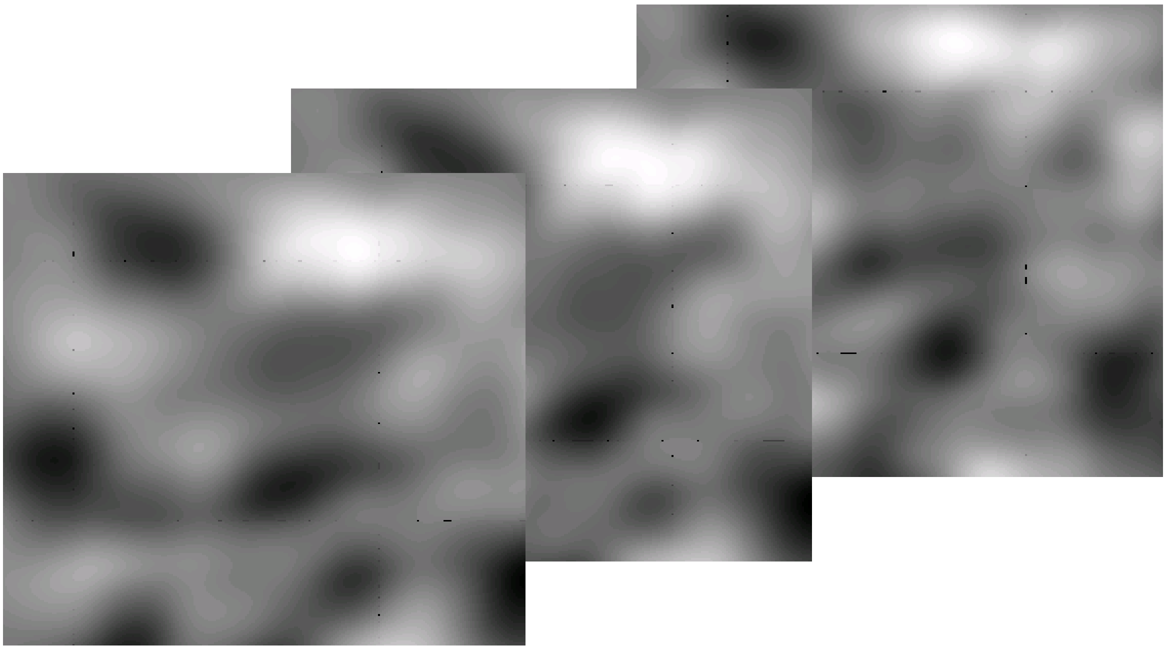


Рис. 4.5 Последовательность кадров 3-х мерного изображения

Таким образом, предложенные в диссертационной работе алгоритмы моделирования и оценивания СП могут найти применение в различных прикладных областях.

4.5 Выводы

1. Предложена методика моделирования граничных отсчетов СП для моделей с кратными корнями. Данная методика дает возможность получать однородную реализацию СП, т.е. сохранять корреляционные связи между элементами поля как в его середине, так и на границах.

2. Методика получения коэффициентов модели для граничных элементов позволяет построить корректную «стартовую» процедуру для оптимального оценивания изображения на его границах.

3. Получены результаты применения предложенных алгоритмов фильтрации для оценивания фрагментов реальных изображений.

4. Разработанный пакет программ для исследования алгоритмов моделирования и фильтрации изображений позволяет моделировать многомерные СП на основе моделей разной кратности. Имеется возможность получения статистических характеристик исследуемых СП, подбора подходящих параметров модели. Также реализованы предложенные оптимальные и близкие к оптимальным алгоритмы фильтрации СП.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты диссертационной работы состоят в следующем:

1. Анализ известных результатов показал, что в настоящее время отсутствуют методы рекуррентного оценивания многомерных изотропных случайных полей, наблюдаемых в дискретном пространстве-времени, на фоне аддитивных помех, близкие по эффективности к глобально-оптимальным оценкам.

2. Для описания реальных, близких к изотропным многомерных изображений предложено использовать пространственно-разделимые авторегрессионные модели с кратными корнями характеристических уравнений. Получены необходимые аналитические соотношения, позволяющие решать задачи синтеза и анализа предложенных математических моделей многомерных изображений.

3. Предложен новый коэффициент анизотропности случайных полей основанный на вычислении среднеквадратического отклонения от среднеуглового корреляционного расстояния. Приведенные примеры показывают, целесообразность применения предложенного коэффициента для оценки отличий авторегрессионных случайных полей от изотропного поля.

4. На основе многомерного фильтра Калмана получены алгоритмы строго оптимального нерекуррентного оценивания авторегрессионных СП с кратными корнями характеристических уравнений. Для синтеза квазиоптимальных рекуррентных процедур предложено рассматривать нерекурсивную часть многомерного фильтра Калмана, как фильтр Винера. Рекуррентные алгоритмы удается получить на основе предположения о допустимости

аппроксимации фильтра Винера калмановскими оценками. Сравнительный анализ строго оптимальных и предложенных квазиоптимальных рекуррентных оценок в широком диапазоне значений проигрыша по величине дисперсии ошибки составляет 3-5%. Вместе с тем, квазиоптимальные алгоритмы позволяют сократить вычислительные затраты для двумерного СП в M раз, где M – число элементов в строке изображения; для изображения, заданного на N-мерной сетке размером $K = M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_N$ элементов, такое сокращение составляет не менее $K \Big/ \max\limits_{1 \le l \le M_l} M_l$ раз при любых кратностях корней характеристических уравнений.

5. Разработанный программный пакет позволяет моделировать СП на основе моделей с кратными корнями, проводить их фильтрацию и изучать статистические и вычислительные характеристики описанных алгоритмов. В пакете имеются возможности как для работы с реализациями моделей СП, так и с реальными изображениями. Кроме того, пакет может быть легко модифицирован и дополнен новыми функциями за счет своей объектно-ориентированной структуры.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1) Бакут П.А., Колмогоров Г.С. Сегментация изображений: Методы выделения границ областей // Зарубежная радиоэлектроника. – 1987, №10.
2) Балакришнан А.В. Теория фильтрации Калмана: Пер. с англ. – М.: Мир, 1988, 168 с.
3) Бендат Дж., Пирсол А. Прикладной анализ случайных данных: Пер. с англ. – М.: Мир, 1989.
4) Богомолов Р.А., Крашенинников В.Р. Ковариационные функции авторегрессионных моделей случайных полей // Радиотехника и электроника, 1986, №6, с.11-21.
5) Богуславский И.А. Прикладные задачи фильтрации и управления. – М.: Наука, 1983. – 400 с.
6) Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов // Пер. с англ.: Под ред. В.Ф. Писаренко. – М.: Мир, 1974, кн. 1. – 406 с.
7) Бронников А.В., Воскобойников Ю.Б. Комбинированные алгоритмы нелинейной фильтрации зашумленных сигналов и изображений // Автометрия. – 1990, №1.
8) Быков Р.Е., Гуревич С.Б. Анализ и обработка цветных и объемных изображений. – М.: Радио и связь, 1984. – 248 с.
9) Васильев К.К. Анализ эффективности фильтрации многомерных случайных полей // Методы обработки сигналов и полей. Сб. научн. тр. – Ульяновск: УлПИ, 1992, с. 18-27.
10) Васильев К.К. Каузальное представление случайных полей на многомерных сетках // Методы обработки сигналов и полей. Сб. научн. тр. – Ульяновск: УлПИ, 1995, с. 4-22.
11) Васильев К.К. Прием сигналов при мультипликативных помехах. – Саратов: СТУ, 1983, – 128 с.

12) Васильев К.К. Рекуррентное оценивание случайных полей на многомерных сетках // Методы обработки сигналов и полей. Саратов, 1986, с. 18-33.

13) Васильев К.К., Герчес В.Г. Анализ эффективности фильтрации плоских изображений // Вероятностные модели и обработка случайных сигналов и полей: Сб. научн. тр. – Киев: УМК ВО, 1991, с. 115-122.

14) Васильев К.К., Герчес В.Г. Исследование эффективности фильтрации изображений при треугольной развертке // Методы обработки сигналов и полей: Сб. научн. тр. – Ульяновск: УлПИ, 1992, с. 33-44.

15) Васильев К.К., Герчес В.Г. Калмановская фильтрация изображений // Методы обработки случайных полей: Сб. научн. тр. – Ульяновск: УлПИ, 1990, с. 105-111.

16) Васильев К.К., Герчес В.Г. Квазиоптимальное оценивание многомерных изображений в реальном масштабе времени // Імовірнісні моделі та обробка випадкових сигналів і полів: Збірник наукових праць. – Том 2, Частина 2 / Під ред. Я.П.Драгана, В.О.Омельченка. – Львів – Харків – Тернопіль, 1993, с. 48-52.

17) Васильев К.К., Герчес В.Г. Рекуррентные методы обработки изображений // Тез. докл. НТК «Научно-технический прогресс и инженерное образование», ч.3, Ульяновск: УлПИ, 1990, с. 11-12.

18) Васильев К.К., Герчес В.Г. Погрешности измерения корреляционных функций случайных полей // Тез. докл. Всесоюзной НТК «Идентификация, измерение характеристик и имитация случайных сигналов», Новосибирск: НЭТИ, 1991, с. 127.

19) Васильев К.К., Герчес В.Г. Применение методов фильтрации изображений в адаптивных системах связи // Тез. докл. НТ школы-семинара «Цифровая обработка сигналов в системах связи

и управления», Ростов Великий, МГП ВНТО РЭС им. А.С.Попова, 1991, с.12.

20) Васильев К.К., Герчес В.Г. Эффективность обнаружения точечных сигналов на фоне мешающих изображений // Тез. докл. Украинской респ. школы-семинара «Вероятностные модели и обработка случайных сигналов и полей», Черкассы: ЧФКПИ, 1991, с.15.

21) Васильев К.К., Герчес В.Г. Эффективность рекуррентного оценивания случайных полей // Статистический синтез и анализ информационных систем. / Сб. докл. 12-го НТ семинара; М.: Моск. техн. ун-т связи и информатики, 1992, с. 100-102.

22) Васильев К.К., Кадеев Д.Н. Алгоритмы обнаружения и оценивания параметров сигналов на многомерных сетках // Статистические методы обработки сигналов. – Новосибирск: НЭТИ, 1991, с. 60-69.

23) Васильев К.К., Крашенинников В.Р. Методы фильтрации многомерных случайных полей. – Саратов: СГУ, 1990. – 128 с.

24) Васильев К.К., Крашенинников В.Р. Тензорная фильтрация случайных полей при марковских смещениях. – В сб.: Методы статистической обработки изображений и полей. – Новосибирск: НЭТИ, 1986, с. 113-126.

25) Васильев К.К., Попов О.В. Оптимальные и квазиоптимальные алгоритмы компенсации мешающих изображений // Тезисы докладов международной научной конференции «Результаты и перспективы исследования планет» – Ульяновск: УлГТУ, 1997, с. 78-79.

26) Васильев К.К., Попов О.В. Авторегрессионные модели случайных полей с кратными корнями // Труды 4-й конференции «Распознавание образов и анализ изображений: новые

информационные технологии» – Новосибирск, 1998, Ч. 1, с. 258-260.

27) Васильев К.К., Попов О.В. Авторегрессионные модели случайных полей с кратными корнями // Труды международной научно-технической конференции «Нейронные, реляторные и непрерывнологические сети и модели» (19-21 мая 1998 года) – Ульяновск: УлГТУ, Т. 1, 1998, с. 78.
28) Васильев К.К., Спектор А.А. Статистические методы обработки многомерных изображений // Методы обработки сигналов и полей. Сб. научн. тр. – Ульяновск: УлПИ, 1992, с. 3-18.
29) Васюков В.Н. Квазиоптимальный алгоритм двумерной фильтрации // Методы статистической обработки изображений и полей, Новосибирск, 1984, с. 14-18.
30) Ванштейн Л.А., Зубаков В.Д. Выделение сигналов на фоне случайных помех. -– М.: Сов. радио, 1960.
31) Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1968.
32) Гимельфарб Г.Л., Залесный А.В. Гиббсовские случайные поля как вероятностные модели изображений на нижнем уровне вычислительного зрения. // Методы обработки сигналов и полей. Сб. научн. тр. – Ульяновск: УлПИ, 1995, с. 22-34.
33) Гинзбург В.М. Формирование и обработка изображений в реальном времени. – М.: Радио и связь, 1986 – 232 с.
34) Даджион Д., Мерсеро Р. Цифровая обработка многомерных сигналов. – М.: Мир, 1988, 488 с.
35) Девис М.Х.А. Линейное оценивание и стохастическое управление / Пер. с англ. – М.: Наука, 1984, 208 с.
36) Джайн А.К. Успехи в области математических моделей для обработки изображений // ТИИЭР, 1981, Т. 69, №5, с. 9-39.

37) Драган Я.П., К.К. Васильев и др. Состояние и перспективы развития вероятностных моделей случайных сигналов и полей. – Харьков: ХИРЭ, 1993, 156 с.

38) Казаринов Ю.М., Соколов А.И., Юрченко Ю.С. Субоптимальные алгоритмы линейной фильтрации в дискретном масштабе времени // Зарубежная радиоэлектроника. – 1987, №8.

39) Касти Дж., Калаба Р. Методы погружения в прикладной математике /Пер. с англ.: Под ред. С.П. Чеботарева. М., 1976, 223 с.

40) Катковник В.Я. Линейные оценки и стохастические задачи оптимизации. – М.: Наука, 1976, 488 с.

41) Катомин Н.П. Синтез и анализ некоторых квазиоптимальных двумерных дискретных линейных фильтров // Радиотехника и электроника. 1981, Т.26, №2, с. 333-362.

42) Крашенинников В.Р. Волновые модели многомерных случайных полей // Методы обработки сигналов и полей: Сб. научн. тр. – Ульяновск: УлПИ, 1987, с. 5-13.

43) Крашенинников В.Р., Ташлинский А.Г. Простейшая векторная модель многомерного авторегрессионного случайного поля // Методы обработки сигналов и полей в условиях помех. – Новосибирск, 1988, с. 9-18.

44) Кузовков Н.Т., Салычев О.С. Инерциальная навигация и оптимальная фильтрация. – М.: Машиностроение, 1982, 216 с.

45) Кучеренко К.И., Очин Е.Ф. Двумерные медианные фильтры для обработки изображений // Зарубежная радиоэлектроника. – 1986, №6.

46) Кловский Д.Д., Сойфер В.А. Обработка пространственно-временных сигналов (в каналах передачи информации). – М.: Связь, 1976, 208 с.

47) Кострикин А.И., Манин Ю.И. Линейная алгебра и геометрия. – М.: Наука, 1986, 304 с.

48) Коростелев А.П. Стохастические рекуррентные процедуры (локальные свойства). – М.: Наука, 1984, 208 с.

49) Карлин С. Основы теории случайных процессов. – М.: Мир, 1971, 536 с.

50) Краснов А.В., Попов О.В. Корреляционные функции авторегрессионных моделей случайных полей с кратными корнями // Тез. докл. Всероссийской научно-практической конференции (с участием стран СНГ) «Современные проблемы создания и эксплуатации радиотехнических систем». – Ульяновск: УлГТУ, 1998, с. 15-17.

51) Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. М., 1976, Кн. 2, 392 с.

52) Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. М., 1976, Кн. 3, 288 с.

53) Леман Э. Теория точечного оценивания / Пер. с англ. – М.: Наука, 1991, 448 с.

54) Льюнг Л. Идентификация систем. Теория для пользователя: Пер. с англ. / Под ред. Я.З. Цыпкина. – М.: Наука, 1991, 432 с.

55) Малышев В.А., Минлос Р.А. Гиббсовские случайные поля. Метод кластерных разложений. – М.: Наука, 1988, 288 с.

56) Миньсу Ш., Дайхун Ч. Алгоритм обнаружения объекта, основанный на графе смежности областей // ТИИЭР, 1984, №7, с. 263.

57) Обработка сигналов в радиотехнических системах: Уч. пособие / Долматов А.Д., Елисеев А.А., Лукошкин А.П., Оводенко А.А., Устинов Б.В.; Под ред. А.П.Лукошкина. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1987, 400 с.

58) Параев Ю.Н. Введение в статистическую динамику процессов управления и фильтрации. – М.: Сов. радио, 1976, 184 с.
59) Позняк Э.Г., Шикин Е.В. Дифференциальная геометрия. – М.: Изд-во МГУ, 1990, 384 с.
60) Попов О.В. Алгоритм калмановской фильтрации изображений // Вестник Ульяновского государственного технического университета. –Ульяновск: УлГТУ, 1999, №2, с. 36-38.
61) Попов О.В. Анализ авторегрессионных моделей случайных полей с кратными корнями // Труды Ульяновского научного центра «Ноосферные знания и технологии» Российской академии естественных наук. Ульяновск: УНЦ РАЕН, 1999, т.2, вып. 1, с. 122-128.
62) Попов О.В. Сравнение эффективности различных алгоритмов фильтрации случайных полей // Тезисы докладов 2-й международной научно-технической конференции «Интерактивные системы: проблемы человеческо-компьютерного взаимодействия» – Ульяновск: УлГТУ, Ч. 2, 1997, с. 65-67.
63) Попов О.В., Перязев С.В. Имитация последовательности спутниковых изображений // Тез. докл. Всероссийской научно-практической конференции (с участием стран СНГ) «Современные проблемы создания и эксплуатации радиотехнических систем». – Ульяновск: УлГТУ, 1998, с. 23-24.
64) Прикладная теория случайных процессов и полей / Васильев К.К., Драган Я.П., Казаков В.А. и др.; Под ред. Васильева К.К., Омельченко В.А. – Ульяновск: УлГТУ, 1995, 256 с.
65) Прэтт У. Цифровая обработка изображений / Пер. с англ.; Под ред. Д.С. Лебедева. М., 1982, Кн. 1, 312 с.
66) Прэтт У. Цифровая обработка изображений / Пер. с англ.; Под ред. Д.С. Лебедева. М., 1982, Кн. 2, 480 с.

67) Пулькин С.П. Вычислительная математика. – М.: Просвещение, 1974.

68) Победря Б.Е. Лекции по тензороному анализу. – М., 1986, 264 с.

69) Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов: Пер. с англ. М.: Мир, 1978.

70) Розанов Ю.А. Марковские случайные поля. – М., 1981, 256 с.

71) Розанов Ю.А. Случайные поля и стохастические уравнения с частными производными. – М.: Физматлит, 1995, 256 с.

72) Самсонов А.Н. Квазиоптимальная рекуррентная фильтрация марковского случайного поля // Методы обработки сигналов и полей: Сб. научн. тр. – Ульяновск: УлПИ, 1990, с. 30-36.

73) Сачков В.Н. Введение в комбинаторные методы дискретной математики. – М.: Наука, 1982, 384 с.

74) Сейдж Э., Мелс Дж. Теория оценивания и ее применение в связи и управлении. Пер. с англ. Под ред. Проф. Б.Р. Левина. М., «Связь», 1976, 496 с.

75) Синева И.С., Левина И.Ю. Марковские случайные поля в анализе и обработке изображений: обзор // Сб. докл. 1-й Международной Конференции «Цифровая обработка сигналов и ее применения» М.: Связь и бизнес, 1998, Т. 2, с. 219-226.

76) Соколов Н.В. Введение в теорию многомерных матриц. -– Киев: Наукова думка, 1972, 176 с.

77) Спектор А.А. Двухэтапная фильтрация случайных полей при действии помех // Методы обработки цифровых сигналов и полей в условиях помех. Новосибирск, 1987, с. 3-9.

78) Спектор А.А. Многомерные дискретные марковские поля и их фильтрация при наличии некоррелированного шума // Радиотехника и электроника. 1985, Т.30, №5, с. 965-972.

79) Спектор А.А. Рекуррентная фильтрация дискретных гауссовских полей при действии гауссовских помех // Тез. докл. II

Всесоюзного семинара секции «Теория информации» ЦП ВНТО РЭС им. А.С. Попова – Ч.1, Ульяновск : УлПИ, 1989, с. 61-62.

80) Спектор А.А., Малов Ю.Э. Исследование точности рекуррентной фильтрации изображения // Методы обработки сигналов и полей: Сб. научн. тр. – Ульяновск: УлПИ, 1987, с. 38-44.

81) Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. – М.: Радио и связь, 1982, 624 с.

82) Хабиби А. Двумерная байесовская оценка изображений // ТИИЭР, 1972, Т.60, №7, с. 153-159.

83) Чураков Е.П. Итеративные алгоритмы оценивания параметров случайных процессов и полей. – Автометрия, 1975, №4, с. 31-36.

84) Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1985, Ч.1, 336 с.

85) Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1985, Ч.2, 400 с.

86) Ширяев А.Н. Статистический последовательный анализ. – М.: Наука, 1976, 272 с.

87) Ярославский Л.П. Введение в цифровую обработку изображений. М., 1979, 312 с.

88) Ahmed M.S., Tahboub K.K. Recursive Wiener Filtering for Image Restoration // IEEE Trans., 1986, Vol. assp – 34, Apr., pp. 990-993

89) Besag J. On the statistical analysis of dirty pictures. J Royal Statistical Soc., Serie B, Vol. 48, No 3, 1986, pp. 259-302.

90) Dikshit S.S. A Recursive Kalman Window Approach to Image Restoration // IEEE Trans., 1984, Vol. com – 32, Jan., pp. 125-139.

91) Kadeev D.N. Applicative Procedure for Simulating Nonuniform Images // Pattern Recognition and Image Analysis, Vol. 6, No. 1, 1996, p.150.

92) Mikheev P.V., Khirug S.S., Yakin G.Yu. A Method for the Representation of Multizone Images // Pattern Recognition and Image Analysis, Vol. 6, No. 1, 1996, pp.87-88.
93) Quinn M.J. Designing Efficient Algorithms for Parallel Computers. N.Y.: Mc. Graw Hill B.C., 1987. 288 p.
94) Vasil'ev K.K., Popov O.V. Autoregression Models of Random Fields with Multiple Roots // Pattern Recognition and Image Analysis, Vol. 9, No. 2, 1999, pp.327-328.
95) Vasil'yev K.K., Skrynnikov A.V. Application of Spectral Methods for Recurrent Image Processing // Pattern Recognition and Image Analysis, Vol. 6, No. 1, 1996, pp.104-105.
96) Woods J.W. Two-dimensional Kalman filtering //Topics in Applied Physics, Berlin, 1981, v.42, pp.155-208.