ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования

Ульяновский государственный технический университет

На правах рукописи

Служивый Максим Николаевич

РАЗРАБОТКА И МОДЕЛИРОВАНИЕ АЛГОРИТМОВ ИНТЕРПОЛЯЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ ПО ДИСКРЕТНЫМ ОТСЧЕТАМ

Специальность: 05.13.18 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»

Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук

Научный руководитель
д. т. н., профессор К.К. Васильев

Ульяновск – 2006

СОДЕРЖАНИЕ

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

АКФ – автокорреляционная функция;

ДПС – дискретное синусное преобразование;

ДПФ – дискретное преобразование Фурье;

КФ – корреляционная функция;

МСИ – межсимвольная интерференция;

ОПК – оценивание параметров канала;

ОСШ – отношение сигнал/шум;

СКО – 1) среднеквадратическая ошибка, 2) среднеквадратическое отклонение;

СП – случайное поле;

УО – устройство оценивания;

BPSK – Binary Phase Shift Keying (двоичная фазовая манипуляция);

MPSK – M-ary Phase Shift Keying (М-ичная фазовая манипуляция);

OFDM – Orthogonal Frequency Division Multiplexing (ортогональное частотное разделение каналов);

PSK – Phase Shift Keying (фазовая манипуляция);

QAM – Quadrature Amplitude Modulation (квадратурная амплитудная модуляция);

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Эффективность многих современных информационных систем существенно зависит от алгоритмов формирования и структурирования передаваемой информации, а также от качества функционирования приемников информации, зачастую представляющих собой пространственные апертуры датчиков.

При этом во многих случаях передаваемая информация содержится в многомерном случайном поле (СП), заданном посредством некоторой модели. Важными задачами обработки таких полей является оптимальная интерполяция значений СП, заданного на дискретной сетке, по неполным наблюдениям, а также задача оптимального размещения датчиков (измерителей) на дискретной сетке с целью минимизации максимальной дисперсии ошибки интерполяции. Подобные задачи возникают в системах с пространственными апертурами датчиков, многочастотных системах связи с пилот-сигналами, а также аэрокосмических системах глобального мониторинга Земли.

Исследованию вопросов интерполяции СП посвящены работы А.Н.Колмогорова, Н.Винера, А.М.Яглома, Р.Ш.Липцера, А.Н.Ширяева, В.А.Сойфера, С.В.Михайлова, С.М.Пригарина, А.А.Новикова и др. Наряду с этим анализ известных работ в области интерполяции СП показал, что в настоящее время отсутствуют удовлетворительные решения разнообразных задач статистического синтеза и анализа соответствующих алгоритмов интерполяции многомерных СП, заданных на дискретных сетках. Кроме этого, в известных публикациях недостаточно разработана задача оптимизации размещения датчиков (измерителей) на дискретной сетке.

В связи с этим задача повышения эффективности процедур интерполяции СП представляется весьма актуальной и выполненное в диссертационной работе исследование этих вопросов является очередным шагом в решении актуальной научной проблемы, имеющей важное прикладное значение, что также подтверждается поддержкой грантом РФФИ 03-01-00370 темы диссертационной работы.

Цель работы. Целью работы является разработка, моделирование и оптимизация алгоритмов интерполяции случайных полей по неполным наблюдениям, обладающих малой вычислительной сложностью и обеспечивающих снижение дисперсии ошибки оценивания за счет модификации известных алгоритмов интерполяции. Для достижения заданной цели необходимо решить следующие задачи.

1. Провести сравнительный анализ известных алгоритмов интерполяции одно- и двумерных СП.

2. Разработать алгоритмы интерполяции СП с использованием оптимальных оценок. Получить оценки относительной дисперсии ошибки интерполяции СП при различных параметрах.

3. Разработать алгоритмы поиска оптимального плана размещения датчиков на одно- и двумерной дискретных сетках. Оценить количественно преимущества оптимального плана размещения датчиков по сравнению со случаем регулярного размещения.

4. Разработать адекватную модель многолучевого канала связи с подвижным объектом.

5. Дать рекомендации относительно количества размещаемых датчиков на сетке заданных размеров в зависимости от требуемого качества интерполяции.

6. Осуществить программную реализацию предложенных алгоритмов интерполяции и размещения датчиков с возможностью их модификации для различных прикладных задач.

Методы исследования основываются на теории вероятностей, теории оптимальной линейной фильтрации СП, методах дискретной математики. При разработке программного обеспечения применялись численные методы и методы объектно-ориентированного программирования в среде Matlab 5.3.

Научная новизна. В диссертации получены следующие новые научные результаты:

1. Предложен алгоритм интерполяции случайных полей на основе оптимальных оценок. Проведен сравнительный анализ точности алгоритмов интерполяции СП на основе зашумленных наблюдений и на основе оптимальных оценок. Показано, что при интерполяции на основе оптимальных оценок удается достичь выигрыша по дисперсии ошибки интерполяции порядка 10-30 % - для одномерного СП и в 2-3 раза – для двумерного СП по сравнению с алгоритмом интерполяции по зашумленным наблюдениям.

2. Получены выражения, позволяющие оценить максимальную дисперсию ошибки интерполяции по наблюдениям, заданным на N-мерной прямоугольной сетке. Получены зависимости, позволяющие по заданной максимальной дисперсии ошибки интерполяции определить необходимые корреляционные расстояния между наблюдениями, используемыми для восстановления непрерывного информационного СП с заданным отношением сигнал/шум.

3. Разработаны алгоритмы поиска оптимального плана размещения датчиков на одно- и двумерной дискретных сетках. Показано, что метод улучшенного перебора позволяет снизить вычислительные затраты, связанные с поиском оптимального плана размещения датчиков, до 40-50 раз по сравнению с алгоритмом полного перебора.

4. Получены зависимости снижения максимальной дисперсии ошибки интерполяции, который достигает 20-30 % за счет оптимизации размещения датчиков. Даны рекомендации по выбору количества размещаемых датчиков на сетке заданных размеров в зависимости от требуемого качества интерполяции при различных параметрах СП.

Практическая значимость. Предложенные алгоритмы интерполяции могут быть использованы при разработке устройств оценивания параметров каналов с помощью пилот-сигналов в перспективных мобильных системах связи, а также при разработке новых методов интерполяции изображений.

Разработанные алгоритмы поиска оптимального плана размещения датчиков на одно- и двумерной дискретных сетках могут оказаться полезными при проектировании пространственных апертур датчиков различных измерительных систем. Результаты диссертационной работы внедрены в учебный процесс.

Апробация работы. Основные положения диссертационной работы докладывались и обсуждались на следующих НТК:

- 6th Open German-Russian Workshop on Pattern Recognition and Image Understanding (OGRW-6-2003, August 25-30, 2003);
- X Международная НТК «Радиолокация, навигация, связь» (Воронеж, 2004 г.);
- VII Международная конференция «Распознавание образов и анализ изображений» (Санкт-Петербург, 2004 г.);
- VII-VIII Международные конференции и выставки «Цифровая обработка сигналов и ее применение» (Москва, 2005, 2006 гг.);
- 61 Научная сессия, посвященная Дню Радио (Москва, 17-18 мая 2006 г.);
- ежегодные конференции профессорско-преподавательского состава Ульяновского государственного технического университета (2004-2006 гг.).

Содержание работы. В первой главе представлен обзор моделей СП, заданных на многомерных сетках. Рассмотрены известные методы интерполяции СП по неполным наблюдениям, заданным на дискретной сетке. Кратко описаны известные методы позиционирования датчиков на дискретной сетке.

Вторая глава посвящена разработке и исследованию эффективных алгоритмов интерполяции СП по неполным наблюдениям. Проведен анализ погрешностей интерполяции СП, заданных посредством многомерной авторегрессионной модели при наличии гауссовского шума с заданной дисперсией. Описан алгоритм интерполяции СП на основе оптимальных оценок, полученных с помощью оптимального линейного фильтра. Приведены аналитические выражения, позволяющие оценить максимальную дисперсию ошибки интерполяции по наблюдениям, заданным на N-мерной прямоугольной сетке. Рассмотрены зависимости позволяющие по заданной максимальной дисперсии ошибки интерполяции определить необходимые корреляционные расстояния между наблюдениями, заданными на дискретной сетке. Представлены сравнительные характеристики предложенных алгоритмов.

В третьей главе представлены алгоритмы поиска оптимального плана размещения датчиков на дискретных сетках. Описан метод улучшенного перебора вариантов размещения датчиков. Даны рекомендации по выбору количества размещаемых датчиков на дискретной сетке заданных размеров для различных параметров СП. Представлены качественные показатели предложенных алгоритмов.

Четвертая глава посвящена вопросам практического применения предложенных алгоритмов интерполяции СП и оптимизации размещения датчиков на дискретной сетке. Дано описание систем связи с ортогональным частотным мультиплексированием, а также устройств оценивания параметров канала связи. Описана авторегрессионная модель канала связи с замираниями и доплеровским смещением спектра. Рассмотрены известные алгоритмы интерполяции изображений, а также возможности использования результатов, полученных в диссертационной работе.

ГЛАВА 1. МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ И ИНТЕРПОЛЯЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

1.1. Постановка задачи

Характерной чертой современных информационных систем является динамичное развитие методов представления и обработки многомерных случайных полей (СП). Математические модели СП служат адекватным описанием данных, получаемых в различных задачах статистической теории связи, радиолокации, аэрокосмических системах мониторинга Земли, медицине, гидролокации. Проблемы обработки многомерных данных, её оптимизации, моделирования как средства решения этих проблем, требуют разработки соответствующего математического аппарата. Одной из важных задач, требующих решения, является разработка и анализ алгоритмов интерполяции СП на многомерных дискретных сетках по неполным данным.

При этом актуальным является построение алгоритмов интерполяции, с помощью которых можно было бы осуществлять обработку данных в реальном времени. Несмотря на большое число публикаций по проблемам интерполяции СП, в настоящее время отсутствуют удовлетворительные решения разнообразных задач статистического синтеза и анализа соответствующих алгоритмов даже для двумерных СП, т.е. плоских изображений. Это объясняется большими методологическими и математическими трудностями построения теории СП, связанными с переходом к пространствам нескольких измерений. При этом формальное использование хорошо разработанных методов теории случайных процессов либо резко ограничивает класс возможных СП, либо приводит к практически непреодолимым вычислительным проблемам реализации полученных алгоритмов даже при использовании самых современных вычислительных средств.

Наряду с вышеупомянутым, во многих приложениях, связанных с системами обработки данных глобального мониторинга Земли, сжатия изображений и томографии, а также при проектировании многочастотных цифровых систем мобильной связи 4 поколения [22] существует задача интерполяции непрерывного многомерного СП, заданного на прямоугольной дискретной сетке, содержащей N узлов по наблюдениям в M узлах, причем $M < N$; или, другими словами, восстановления СП по неполным наблюдениям. Кроме этого, поскольку пространственные апертуры датчиков в системах извлечения информации имеют ограниченные размеры, возникает задача оптимального размещения датчиков на дискретной сетке с целью минимизации максимальной дисперсии ошибки оценивания. В известных работах [21] отсутствует сравнительный анализ эффективности различных алгоритмов интерполяции СП по неполным наблюдениям и алгоритмов оптимизации размещения датчиков на дискретной сетке.

В связи с этим, весьма важной представляется задача анализа существующих методов представления и обработки (интерполяции) многомерных массивов цифровых данных, представленных в виде многомерных СП, а также оптимизация соответствующих алгоритмов с точки зрения вычислительных затрат.

Для решения поставленных задач вначале проанализированы основные методы имитации СП, заданных на дискретных сетках (п. 1.2). При этом основное внимание уделено авторегрессионным стохастическим моделям. В п. 1.3 дан аналитический обзор методов интерполяции СП по неполным дискретным наблюдениям. В п. 1.4 рассмотрены вопросы оптимизации позиционирования ограниченного числа неполных наблюдений на дискретной сетке.

1.2. Методы имитации дискретных случайных полей

При решении задач обработки СП важным этапом является выбор адекватной модели наблюдений [5, 10, 24, 44, 45]. В настоящее время не существует универсального способа формирования СП с произвольно заданными характеристиками. Поэтому известные модели СП соответствуют реальным СП лишь по ограниченному числу параметров (форма корреляционной функции, распределение амплитуд и т.п.) [16, 46, 57, 58, 81]. Рассмотрим ряд известных моделей, которые могут быть использованы для приближенного описания СП при синтезе различных процедур фильтрации и интерполяции.

Наиболее изученными являются авторегрессионные (АР) модели СП [5, 7, 16, 21, 29, 30, 37, 58, 59, 77, 84, 87, 134]. Это объясняется тем, что на основе АР уравнений был разработан математический аппарат для моделирования случайных последовательностей. Центральное место в его развитии, как и в области обычных одномерных сигналов, отводится теории гауссовских полей. Поскольку в подавляющем большинстве реальных информационных систем данные формируются в виде дискретных массивов, то в первую очередь интерес представляют методы описания дискретных полей. Поэтому ниже рассматриваются СП, заданные на многомерных прямоугольных сетках.

Известно достаточно большое количество публикаций, развивающих эту область теории сигналов [16, 58, 80]. Вполне оправданным представляется большое внимание, уделяемое рекуррентным механизмам формирования полей [16, 29, 77, 87, 106]. Вместе с тем, отсутствие систематических методов в разработке моделей превращает решение каждой конкретной задачи в достаточно сложный научный процесс, что далеко не всегда оправдано. В настоящей работе при рассмотрении моделей СП используется идея представления спектрально-корреляционных характеристик многомерных сигналов в разделимой по пространственным координатам форме [58]. Это дает возможность использования достижений теории одномерных сигналов, приводя к несложным математическим моделям, уже позволившим получить относительно простое решение ряда задач статистической обработки [77-80].

Эффективным методом решения задач статистической обработки СП служит спектральный анализ [7, 16, 21, 27, 135]. К сожалению, как уже было упомянуто, существует лишь узкий класс так называемых «разделимых» СП на многомерных сетках [58, 77-80], для которых можно получить полезные для приложений аналитические соотношения. В частности, важнейший класс изотропных СП дискретного аргумента не удается исследовать известными методами спектрального анализа. Это объясняется несоответствием декартовой системы координат в пространстве R_0^N точек с целочисленными координатами и естественной для изотропных СП сферической системой координат в R^N.

Рассмотрим вначале информационное однородное СП $\left\{x_{\bar{j}}\right\}$, $\bar{j}=\left(j_1\ j_2\ \ldots\ j_N\right)$ с $M\left\{x_{\bar{j}}\right\}=0$, заданное на N-мерной сетке J бесконечных размеров: $J=\left\{\bar{j}:\left\{-\infty<j_k<\infty\right\}_{k=1}^{N}\right\}$. При условии положительной определенности корреляционной функции (КФ) $R\left(\bar{r}\right)=M\left\{x_{\bar{j}}\,x_{\bar{j}+\bar{r}}\right\}, \bar{r}\in J$, существует спектральное представление $R\left(\bar{r}\right)=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ldots\int\limits_{-\pi}^{\pi}\exp\left\{i\left(\bar{r},\bar{\lambda}\right)\right\}F\left(d\bar{\lambda}\right)$, где $F\left(d\bar{\lambda}\right)$ - спектральная мера на прямоугольнике $\Gamma=\left\{\bar{\lambda}:\left\{-\pi\le\lambda_1\le\pi\right\}_{i=1}^{n}\right\}$. Если $F\left(d\bar{\lambda}\right)$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега на Γ, то

$$R\left(\bar{r}\right)=\int\limits_{\Gamma}\exp\left\{i\left(\bar{r},\bar{\lambda}\right)\right\}f\left(\bar{\lambda}\right)d\bar{\lambda}, \tag{1.1}$$

где $f\left(\bar{\lambda}\right)$ - спектральная плотность СП. Когда $\sum\limits_{\bar{r}\in J}R^2\left(\bar{r}\right)<\infty$, имеет место равенство

$$f\left(\bar{\lambda}\right)=\left(2\pi\right)^{-N}\sum_{\bar{r}\in J}\exp\left\{-i\left(\bar{r},\bar{\lambda}\right)\right\}R\left(\bar{r}\right)=\left(2\pi\right)^{-N}\sum_{\bar{r}\in J}\bar{z}^{\bar{r}}R\left(\bar{r}\right), \tag{1.2}$$

где $\left(\bar{r},\,\bar{\lambda}\right)=\sum\limits_{l=1}^{N}r_l\lambda_l$; $z_l=\exp\left\{-i\lambda_l\right\}, l=1,2,\ldots,N$; $\bar{z}^{\bar{r}}=\prod\limits_{l=1}^{N}z_l^{r_l}$.

Как показывает анализ, реальные возможности получения компактных расчетных соотношений для спектральной плотности (1.2) связаны с полями, КФ которых могут быть представлены в виде произведения

$$R(\overline{r}) = \prod_{l=1}^{N} R_l(r_l) \tag{1.3}$$

или линейной комбинации таких произведений. Например, если

$$R(\overline{r}) = \sigma_X^2 \prod_{l=1}^{N} \rho_l^{|r_l|},$$

где ρ_l - коэффициент корреляции двух соседних по индексу j_l отсчетов СП $\left\{x_{\overline{j}},\ \overline{j} \in J\right\}$, то $f\left(\overline{\lambda}\right) = \sigma_X^2 \prod_{l=1}^{N} \dfrac{\left(1-\rho_l^2\right)}{\left(1-\rho_l z_l\right)\left(1-\rho_l z_l^{-1}\right)}$.

Рассмотрим задачу рекуррентного формирования СП $\left\{x_{\overline{j}};\ \overline{j} = \left(j_1\ j_2\ \ldots\ j_N\right) \in J\right\}$ на N-мерной прямоугольной сетке $J = \left\{\overline{j},\ j_k = 1 + M_k,\ k = 1,2,\ldots,N\right\}$. При этом предполагается, во-первых, существование некоторой процедуры последовательного перебора точек $\overline{j} \in J$, т.е. правила линейного упорядочения точек $\overline{j}, \overline{l} \in J$, на основе которого можно сказать, что элемент $\overline{j}$ предшествует элементу $\overline{l}\left(\overline{j} < \overline{l}\right)$ или наоборот. Во-вторых, должен быть задан алгоритм, определяющий, каким образом очередное значение СП $x_{\overline{j}}$ может быть найдено на основе ранее вычисленных значений $\left\{x_{\overline{l}},\ \overline{l} \in G_{\overline{j}}\right\}$, где $G_{\overline{j}} \subset J$ - некоторая область индексов $\overline{l} \in J$, предшествующих очередному элементу $\overline{j}$. Такую область $G_{\overline{j}}$ конечных размеров обычно называют каузальным окном, каузальной маской или областью локальных состояний [15, 16, 27]. Наконец, для формирования СП $\left\{x_{\overline{j}},\ \overline{j} \in J\right\}$ с определенными вероятностными характеристиками на каждом шаге рекуррентных вычислений функция $x_{\overline{j}} = \Phi_{\overline{j}}\left(x_{\overline{l}},\ \overline{l} \in G_{\overline{j}}\right)$ должна включать в качестве аргумента совокупность $\left\{\xi_{\bar{l}}, \bar{l} \in Y_{\bar{j}}\right\}, Y_{\bar{j}} \subset J$ вспомогательных случайных величин.

Таким образом, представление СП на основе рекуррентной процедуры должно иметь следующий вид

$$x_{\bar{j}} = \Phi_{\bar{j}}\left(x_{\bar{l}}, \bar{l} \in G_{\bar{j}};\ \xi_{\bar{i}}, i \in Y_{\bar{i}}\right) \tag{1.4}$$

где $G_{\bar{j}}$ - области элементов $\bar{l} \in J$, на которых уже определены предыдущие значения СП $\left\{x_{\bar{l}}\right\}; \varphi_{\bar{j}}\left(x_{\bar{l}}; \xi_{\bar{l}}\right), \bar{j} \in J$, вообще говоря, нелинейные скалярные или векторные функции двух тензорных аргументов. Наиболее простым частным случаем (1.4) является линейное стохастическое уравнение

$$x_{\bar{j}} = \sum_{\bar{l} \in G_{\bar{j}}} \alpha_{\bar{j},\bar{l}} x_{\bar{l}} + \sum_{\bar{l} \in Y_{\bar{j}}} \beta_{\bar{j},\bar{l}} \xi_{\bar{l}},\ \bar{j} \in J \tag{1.5}$$

с белым гауссовским СП $\left\{\xi_{\bar{l}}\right\}$, соответствующее известному уравнению авторегрессии-скользящего среднего [7] для случайных последовательностей. Однако в отличие от своего одномерного аналога, свойства СП $x_{\bar{j}}, \bar{j} \in J$, порождаемого (1.5), в настоящее время изучены не полностью даже для моделей (1.5) с постоянными коэффициентами $\alpha_{\bar{j},\bar{l}} = \alpha_{\bar{l}},\ \beta_{\bar{j},\bar{l}} = \beta_{\bar{l}}$ и не изменяющимся видом областей $G_{\bar{j}} = G$ и $Y_{\bar{j}} = Y$:

$$x_{\bar{j}} = \sum_{\bar{l} \in G} \alpha_{\bar{l}} x_{\bar{j}-\bar{l}} + \sum_{\bar{l} \in Y} \beta_{\bar{l}} \xi_{\bar{j}-\bar{l}},\ \bar{j} \in J\ . \tag{1.6}$$

Важным частным случаем (1.6) является уравнение многомерной авторегрессии [16, 77]

$$x_{\bar{j}} = \sum_{\bar{l} \in G} \alpha_{\bar{l}} x_{\bar{j}-\bar{l}} + \xi_{\bar{j}},\ \bar{j} \in J\ . \tag{1.7}$$

свойства которого для двумерного СП изучались в большом числе работ [15, 27, 77-80].

Для того, чтобы уменьшить число слагаемых в (1.6), (1.7) и упростить анализ, в работе [58] вводятся векторные СП $\bar{x}_{\bar{j}} = \left(x_{1\bar{j}}\ x_{2\bar{j}}\ \ldots\ x_{N\bar{j}}\right)^T,\ \bar{j} \in J$. Выбирая в качестве компонент такого вектора значения СП $\left\{x_{\bar{j}-\bar{l}}, \bar{l} \in G_0\right\}$, можно привести уравнение (1.6) с любой N-мерной маской G одного квадранта и $Y \subset G$ к простейшему виду:

$$\overline{x}_{\overline{j}} = \sum_{k=1}^{N} A_k \overline{x}_{\overline{j}-\overline{l}_k} + \sum_{k=0}^{N} B_k \overline{\xi}_{\overline{j}-\overline{l}_k}, \ \overline{j} \in J, \tag{1.8}$$

где $\overline{l}_k = (0\ldots010\ldots0)$ - единичный вектор k-й координатной оси; $\overline{l}_0 = \overline{0}$; A_k и B_k - $n \times n$-матрицы. Соответственно уравнение (1.7) пространственной авторегрессии после введения векторных обозначений перепишется следующим образом [16]

$$\overline{x}_{\overline{j}} = \sum_{k=1}^{N} A_k \overline{x}_{\overline{j}-\overline{l}_k} + B_0 \overline{\xi}_{\overline{j}}, \ \overline{j} \in J. \tag{1.9}$$

Размерность n вектора $\overline{x}_{\overline{j}}$, необходимая для преобразования уравнения (1.6) в (1.7), определяется видом области G. В работе [58] показано, что при соответствующем выборе матриц A_k, $k = 1,2,\ldots,N$, возможно представление (1.6) в виде (1.8).

Одним из простейших вариантов (1.9) является так называемая «трехточечная» АР-модель [16, 87]:

$$\begin{aligned} x_{i,j} &= \rho_y x_{i-1,j} + \rho_x x_{i,j-1} - \rho_y \rho_x x_{i-1,j-1} + \\ &+ \sigma_x \sqrt{\left(1-\rho_y^2\right)\left(1-\rho_x^2\right)}\,\xi_{i,j} \end{aligned}. \tag{1.10}$$

Порождаемое моделью (1.10) СП имеет следующую КФ:

$$V_x(k,l) = \sigma_x^2 \rho_y^{|k|} \rho_x^{|l|}. \tag{1.11}$$

Наиболее существенный недостаток данной модели – множительность КФ. В двумерном случае одинаково коррелированные с $x_{i,j}$ элементы поля расположены на ромбе с центром в (i,j). В то же время, сечениями КФ реальных полей являются обычно различной кривизны эллипсы.

Для скругления сечений КФ СП необходимо увеличивать порядок марковости (расширять область локальных состояний). Так, например, пятиточечная модель СП [16]

$$
\begin{gathered}
x_{i,j} = \alpha_1 x_{i-1,j} + \alpha_2 x_{i,j-1} + \alpha_3 x_{i-1,j-1} + \\
+ \alpha_4 x_{i-2,j} + \alpha_5 x_{i,j-2} + \beta \xi_{i,j}
\end{gathered} \tag{1.12}
$$

позволяет получить СП с разнообразными формами сечений КФ. Однако применение этой модели на практике ограничено в связи с отсутствием на данный момент решений, позволяющих вычислять коэффициенты пятиточечной модели для произвольно заданной КФ.

В настоящее время пока не удалось получить какие-либо общие рекомендации к построению моделей неоднородных СП вида (1.6)-(1.9) из-за многообразия возможных видов определения матричных коэффициентов на n-мерной сетке J. В связи с этим следует ограничиться частным, но важным для приложений классом однородных СП $\left\{ x_{\bar{j}},\ \bar{j} \in J \right\}$, для которых можно получить ряд полезных результатов.

Другой вариант расчета КФ может быть основан на методах спектрального анализа [58]. Для этого выполним n-мерное z-преобразование СП (1.6). При этом нетрудно получить следующую связь $x(\bar{z}) = H(\bar{z})\xi(\bar{z})$ между z-преобразованиями $x(\bar{z})$ и $\xi(\bar{z})$ СП $x_{\bar{j}}$ и $\xi_{\bar{j}}$, причем

$$
H(\bar{z}) = \frac{\sum\limits_{\bar{l} \in Y} \beta_{\bar{l}} \bar{z}^{\bar{l}}}{\left(1 - \sum\limits_{\bar{l} \in G} \alpha_{\bar{l}} \bar{z}^{\bar{l}}\right)} \tag{1.13}
$$

передаточная функция линейного фильтра (1.6); $\bar{z}^{\bar{l}} = z_1^{l_1} z_2^{l_2} \ldots z_N^{l_N}$. В этом случае спектральная плотность СП $x_{\bar{j}}$ может быть представлена в виде

$$
f_X(\bar{z}) = H(\bar{z})\, f_\xi(\bar{z}) H^+(\bar{z}), \tag{1.14}
$$

где $f_\xi(\bar{z}) = \sigma_\xi^2 = 1$; $H^+(\bar{z}) = H^T\left(\bar{z}^{-1}\right)$.

Рассмотрим в качестве примера двумерное СП, заданное одной из наиболее простых моделей $x_{j_1 j_2} = \alpha_{10} x_{(j_1-1) j_2} + \alpha_{01} x_{j_1 (j_2-1)} + \alpha_{11} x_{(j_1-1)(j_2-1)} + \beta_0 \xi_{j_1 j_2}$. В этом случае передаточная функция (1.13) фильтра запишется в виде

$$H\left(z_1, z_2\right) = \frac{\beta_0}{\left(1 - \alpha_{10} z_1 - \alpha_{01} z_2 - \alpha_{11} z_1 z_2\right)} \qquad (1.15)$$

и может быть легко найдена КФ для любых заданных значений коэффициентов [16]. Вместе с тем, для одного частного случая, когда $\alpha_{11} = -\alpha_{10}\alpha_{01}$, анализ СП упрощается. Действительно, передаточная функция (1.15) приводится к виду

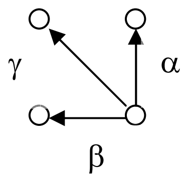
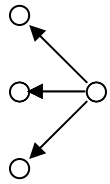
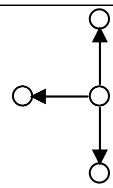
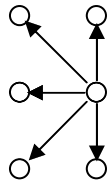
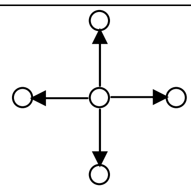
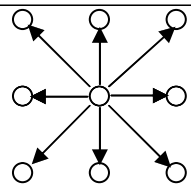
$$H\left(z_1, z_2\right) = \frac{\beta_0}{\left(1 - \alpha_{10} z_1\right)\left(1 - \alpha_{01} z_2\right)},$$

т.е. может быть представлена в виде произведения $H\left(z_1, z_2\right) = H_1\left(z_1\right) H_2\left(z_2\right)$ передаточных функций $H_1\left(z_1\right)$ и $H_2\left(z_2\right)$, соответствующих одномерным линейным системам. При этом и КФ $R\left(r_1, r_2\right)$ также равна произведению $R\left(r_1, r_2\right) = R\left(r_1\right) R\left(r_2\right) = \sigma_X^2 \alpha_{10}^{|r_1|} \alpha_{01}^{|r_2|}$ КФ случайных последовательностей.

Случайные поля дискретного аргумента, спектральные плотности которых могут быть факторизованы $f_X\left(\overline{z}\right) = \prod_{k=1}^{N} f_k\left(z_k\right)$, составляют наиболее простой объект для исследований. Двумерное разделимое поле впервые было рассмотрено в работе [87]. В дальнейшем полученные результаты [87] были существенным образом расширены и обобщены на СП произвольной размерности [77-80].

Выше были рассмотрены каузальные модели СП однако ими не исчерпывается весь ассортимент дискретных СП и поскольку рассматриваемые в диссертационной работе алгоритмы интерполяции относятся преимущественно к двумерным СП (изображениям), то следует рассмотреть все типовые разновидности моделей таких полей, заданных на дискретных сетках. В табл. 1.1 представлено соответствие дискретных моделей изображения непрерывным операторам в частных производных и рассмотрены три класса моделей изображений широко используемых на практике.

Таблица 1.1

Модель	ДУЧП-оператор	Пространственная структура
Каузальная К1	$\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} + a_1 \dfrac{\partial}{\partial x} + a_2 \dfrac{\partial}{\partial y} + a_3$ $x_{i,j} = \alpha x_{i-1,j} + \beta x_{i,j-1} - \gamma x_{i-1,j-1} + \xi_{i,j}$	
Полукаузальная ПК1	$\dfrac{\partial}{\partial y} - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + a_1$ $x_{i,j} = \beta x_{i,j-1} - \gamma \left(x_{i-1,j-1} + x_{i+1,j-1} \right) + \xi_{i,j}$	
Полукаузальная ПК2	$\dfrac{\partial}{\partial y} - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + a_1$ $x_{i,j} = \alpha \left(x_{i-1,j} + x_{i+1,j} \right) + \beta x_{i,j-1} + \xi_{i,j}$	
Полукаузальная ПК3	$\dfrac{\partial}{\partial y} - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + a_1, \quad \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + a_1 \right) \left(\dfrac{\partial}{\partial y} + a_2 \right)$ $x_{i,j} = \alpha \left(x_{i-1,j} + x_{i+1,j} \right) + \beta x_{i,j-1} - \gamma \left(x_{i-1,j-1} + x_{i+1,j-1} \right) + \xi_{i,j}$	
Некаузальная НК1	$\dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + a_1$ $x_{i,j} = \alpha \left(x_{i-1,j} + x_{i+1,j} \right) + \beta \left(x_{i,j+1} + x_{i,j-1} \right) + \xi_{i,j}$	
Некаузальная НК2	$\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + a_1 \right) \left(\dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + a_2 \right), \quad \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + a_1 \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} + a_2 \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ $x_{i,j} = \alpha \left(x_{i-1,j} + x_{i+1,j} \right) + \beta \left(x_{i,j-1} + x_{i,j+1} \right) -$ $- \gamma \left(x_{i-1,j-1} + x_{i-1,j+1} + x_{i+1,j-1} + x_{i+1,j+1} \right) + \xi_{i,j}$	

Примечание. Все диагональные стрелки на рисунках соответствуют γ, горизонтальные – β и вертикальные – α.

В каждом из трёх выделенных классов можно указать модели, представляющие собой аппроксимирующий шаблон некоторого непрерывного оператора в частных производных и поэтому имеющих ясный физический смысл (процессы диффузии, рождения и гибели, колебательные процессы и т.п.). Соответственно принятой классификации моделей можно указать порождающие их дифференциальные уравнения в частных производных (ДУЧП): гиперболические ДУЧП (каузальные модели), параболические (полукаузальные), эллиптические ДУЧП (некаузальные). Для примера некоторые из разностных операторов и соответствующих им непрерывных прототипов приведены в табл. 1.1. Параметры цифровых шаблонов (α, β, γ) определяются разностной аппроксимацией конкретного ДУЧП [23, 66, 113, 114] или идентифицируются по КФ требуемого вида каким-либо из известных методов [21, 29, 30].

Такое соответствие имеет весьма важные последствия как для построения модели (анализ устойчивости, стационарности), так и для построения алгоритмов обработки (использование разностных методов) в силу хорошо развитой теории ДУЧП [60, 66].

В работе [21] описаны каузальные и полукаузальные модели, приводящие к соответствующим разностным уравнениям (табл. 1.1), которые можно преобразовать и перейти к матричной записи

$$Q\mathbf{x}_j = P\mathbf{x}_{j-1} + \xi_j + \mathbf{b}_j, \tag{1.16}$$

где для К1 $Q = L_1(i,j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ -\alpha, & i - j = 1 \end{cases}$, $P = L_2(i,j) = \begin{cases} \beta, & i = j \\ -\gamma, & i - j = 1 \end{cases}$,

$b_j(1) = \alpha x_{0,j} - \gamma x_{0,j-1}$, $b_j(i) = 0$ для $i \ge 2$;

для ПК1 $Q = I$ (I – единичная матрица); для ПК2, ПК3 Q – трехдиагональная теплицева матрица:

$$Q(i,j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ -\alpha, & |i - j| = 1; \end{cases} \tag{1.17}$$

$P = \beta I$ для ПК2; для моделей ПК1, ПК3 P – также трехдиагональная теплицева матрица:

$$P(i,j) = \begin{cases} \beta, & i = j \\ -\gamma, & |i - j| = 1; \end{cases} \tag{1.18}$$

$$\mathbf{b}_j^T = \begin{cases} \left[-\gamma x_{0,j-1}, 0, \ldots, 0, -\gamma x_{N+1,j-1}\right] & \text{для ПК1} \\ \left[\alpha x_{0,j}, 0, \ldots, 0, \alpha x_{N+1,j}\right] & \text{для ПК2} \\ \left[\alpha x_{0,j} - \gamma x_{0,j-1}, 0, \ldots, 0, \alpha x_{N+1,j} - \gamma x_{N+1,j-1}\right] & \text{для ПК3.} \end{cases}$$ - вектор граничных условий.

Разумеется, рассмотренный круг моделей не является исчерпывающим. Модели высших порядков могут обеспечить лучшую аппроксимацию реальных изображений. Однако выбор модели обусловлен, помимо требования точности описания, возможностью построения эффективного алгоритма обработки [16, 135]. С учетом этого рассмотренные модели хорошо соответствуют реальным данным, обладают существенными преимуществами с вычислительной точки зрения, позволяя строить рекуррентные процедуры оценивания и использовать при обработке быстрые спектральные преобразования [27, 86, 89].

Многомерные СП стали объектом исследований сравнительно недавно и именно этим объясняется далекое от завершения, а во многих случаях носящее постановочный характер, изложение рассмотренных математических моделей на пространственных сетках. При отборе вероятностных моделей СП в данной работе предпочтение было отдано таким методам представления СП на многомерных сетках, которые позволяют дать наиболее простое и, вместе с тем, полное вероятностное описание СП, позволяющее решать разнообразные задачи статистического синтеза оптимальных алгоритмов оценивания. В результате за рамками изложения остались важнейший класс гиббсовских СП [20, 50], имитация которых в многих случаях требует больших вычислительных затрат [20, 57], а также множество моделей, например, волновых [41] и нелинейных [13], которые применяются в задачах статистического моделирования для оценки эффективности и устойчивости алгоритмов, предназначенных для практического использования.

1.3. Методы интерполяции случайных полей

В научных работах по обработке СП [12, 53, 56, 61, 63, 92] в основном, как правило, рассматриваются алгоритмы фильтрации и восстановления СП для случаев, когда область наблюдений совпадает с самим СП, т.е. когда наблюдаются все его элементы. Будем называть такие наблюдения полными, отличая их тем самым от неполных, когда наблюдаются или доступны измерениям лишь некоторые элементы СП. Используемый в рамках обсуждаемой задачи термин «восстановление» означает интерполяцию, т.е. по наблюдаемой (возможно малой) области строится оценка СП на всей области его задания [21]. Задачи такого рода возникают при восстановлении пространственного сигнала по точечным измерениям с датчиков, при сжатии данных, при обработке изображений, когда некоторые области изображения (например, некоторые строки или блоки строк) необратимо искажены и т.д.

Рассмотрим основные положения теории интерполяции СП [47, 81, 93].

Интерполяция пропущенного значения. Пусть $T = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ и $\{x(t), t \in T\}$ - стационарный процесс с абсолютно непрерывной спектральной функцией $F(\lambda)$. Предположим, что известны значения $x(s)\ (s \neq t_0)$. Требуется осуществить оптимальную (линейную) интерполяцию $\widehat{x}(t_0)$ пропущенного значения $x(t_0)$. Величина

$$M\left\{\left[x(t_0) - \widehat{x}(t_0)\right]\left[x^T(t_0) - \widehat{x}^T(t_0)\right]\right\} = \begin{cases} \sigma^2\ (\textit{скалярный процесс}) \\ G\ (\textit{векторный процесс}) \end{cases}$$

называется ошибкой (матрицей ошибок) интерполяции пропущенного значения.

<u>Теорема 1.</u> Если $\{x(t), t \in T\}$ - скалярный процесс и $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{d\lambda}{f(\lambda)} < \infty$, где $f(\lambda)$ - его спектральная плотность, то оптимальная линейная интерполяция $\widehat{x}(t_0)$ пропущенного значения $x(t_0)$ дается формулой

$$\widehat{x}(t_0)=\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t_0}\left[1-2\pi\left(f(\lambda)\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\mu}{f(\mu)}\right)^{-1}\right]d\zeta(\lambda),$$

где $\zeta(\lambda)$ - спектральный процесс для $\{x(t), t\in T\}$. При этом ошибка интерполяции $\sigma^2=4\pi^2\left(\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\lambda}{f(\lambda)}\right)^{-1}$.

Пусть $\{\xi(t), t\in T\}$ - векторный процесс и $f(\lambda)$ - его матричная спектральная плотность. Обозначим через $f^{(-1)}(\lambda)$ обратную матрицу к $f(\lambda)$ (если $\det f(\lambda)\neq 0$) либо обобщенную обратную (если $\det f(\lambda)=0$). Последнее означает, что $f^{(-1)}(\lambda)=\left[f(\lambda)+\Pi(\lambda)\right]^{-1}-\Pi(\lambda)$, где $\Pi(\lambda)$ однозначно определяется соотношениями $f(\lambda)\Pi(\lambda)=\Pi(\lambda)f(\lambda)=0$ и $\Pi(\lambda)=\Pi^2(\lambda)$.

Теорема 2. Если $\{x(t), t\in T\}$ - векторный процесс и матрица $f^{(-1)}(\lambda)$ интегрируема, то оптимальная линейная интерполяция $\widehat{x}(t_0)$ пропущенного значения $x(t_0)$ дается формулой

$$\widehat{x}(t_0)=\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t_0}\left[I-\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{(-1)}(\lambda)d\lambda\right\}^{(-1)} f^{(-1)}(\lambda)\right]d\zeta(\lambda),$$

где $\zeta(\lambda)$ - спектральный процесс для $\{x(t), t\in T\}$. При этом матрица ошибок интерполяции $G=4\pi^2\left\{\int_{-\pi}^{\pi} f^{(-1)}(\lambda)d\lambda\right\}^{(-1)}$.

Пример 1. Пусть $\{x(t), t\in T\}$ - марковский в широком смысле процесс со спектральной плотностью $f(\lambda)=\dfrac{1-\beta^2}{2\pi\left|1-\beta e^{-i\lambda}\right|^2}$, $\beta=e^{-\alpha}$, $\alpha>0$.

Оптимальная линейная интерполяция $\widehat{x}(t_0)$ пропущенного значения $x(t_0)$ дается формулой

$$\widehat{x}(t_0)=\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t_0}\frac{\beta}{1+\beta^2}\left[e^{i\lambda}+e^{-i\lambda}\right]d\zeta(\lambda)=\frac{\beta}{1+\beta^2}\left[x(t_0+1)+x(t_0-1)\right].$$

Ошибка интерполяции $\sigma^2 = \dfrac{1-\beta^2}{1+\beta^2}$.

Интерполирование значений стационарного процесса с непрерывным временем по наблюдениям в равноотстоящие дискретные моменты. Пусть $\{x(t), t \in T\}$ - скалярный стационарный процесс с непрерывным временем, спектральная функция $F(\lambda)$ которого абсолютно непрерывна. Предположим, что наблюдаются значения $x(n)$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

<u>Теорема 3.</u> Оптимальная линейная интерполяция $\widehat{x}(t)$ процесса $\{x(t), t \in T\}$ по наблюдениям $x(n)$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ дается формулой

$$\widehat{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} f(\lambda + 2\pi l) e^{it(\lambda+2\pi l)} \right) \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} f(\lambda + 2\pi l) \right)^{-1} d\zeta(\lambda)$$

где $f(\lambda)$ - спектральная плотность процесса $\{x(t), t \in T\}$ и $\zeta(\lambda)$ - его спектральный процесс. Ошибка интерполяции $\sigma^2 = M\left|x(t) - \widehat{x}(t)\right|^2$ равна

$$\widehat{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left| 1 - \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} f(\lambda + 2\pi l) e^{it2\pi l} \right) \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} f(\lambda + 2\pi l) \right)^{-1} \right| f(\lambda) d\lambda .$$

В частности, если $\sigma^2 = 0$, то процесс $\{x(t), t \in T\}$ может быть безошибочно проинтерполирован по значениям $x(n)$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы $f(\lambda)$ обращалась в нуль вне отрезка $[-\pi, \pi]$. В этом случае имеет место формула Котельникова-Шеннона [6, 49, 51, 90]

$$\widehat{x}(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi(j-t)}{\pi(j-t)} x(j).$$

Оптимальность оценки понимается в смысле минимума среднеквадратической ошибки восстановления. Кроме того, наблюдения предполагаются точечными (пространственное осреднение отсутствует), а аддитивный шум измерений – белым.

Прежде чем обратиться к двумерной задаче, рассмотрим некоторые результаты для одномерных сигналов [21]. Рассмотрим задачу восстановления дискретной последовательности $x_i,\ i=\overline{1,N}$ по некоторой (произвольной) совокупности M её измеренных отсчетов (рис. 1.1):

$$z_k = x_k + \theta_k,\ k \in K_n \tag{1.19}$$

где подмножество K_n образовано прореживанием соответственно характеру неполных наблюдений множества $\{1, 2, \ldots, N\}$, т.е. определено номерами измеряемых элементов последовательности $\{i_1, i_2, \ldots, i_M\}$ (на рис. 1.1 указанное подмножество принимает числовые значения $\{3, 5, 6, \ldots, N-2\}$). В матричных обозначениях уравнение наблюдения (1.19) примет канонический вид

$$\mathbf{z} = H\mathbf{x} + \theta, \tag{1.20}$$

где $\mathbf{z} = \left[z_{i_1}, z_{i_2}, \ldots, z_{i_M}\right]^T$, $\mathbf{x} = \left[x_1, x_2, \ldots, x_N\right]^T$, $\theta = \left[\theta_{i_1}, \theta_{i_2}, \ldots, \theta_{i_M}\right]^T$,

а строки матрицы наблюдения H_m определяются условием $x_{i_m} = H_m\mathbf{x},\ m=\overline{1,M}$, т.е. m-я строка H содержит единицу в позиции i_m и нули в остальных.

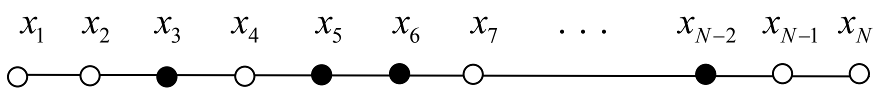


Рис. 1.1.

Оптимальную оценку $\mathbf{x}$ в (1.20) при квадратичной функции потерь и в предположении некоррелированных $\mathbf{x}$ и θ осуществляет винеровский фильтр

$$\hat{\mathbf{x}} = G\mathbf{z},\ G = R_X H^T \left(HR_X H^T + R_\theta\right)^{-1}, \tag{1.21}$$

где R_X и R_θ - корреляционные матрицы сигнала и шума.

В рамках винеровского подхода в работе [21] рассмотрен следующий способ обработки, соответствующий неполным измерениям. Переупорядочим $\mathbf{x}$, разделяя наблюдаемые и ненаблюдаемые отсчеты последовательности:

$$\mathbf{x}^T = \left[\mathbf{v}^T, \mathbf{w}^T\right],\ \mathbf{v}^T = \left[x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_M}\right],\ \mathbf{w}^T = \left[x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_{N-M}}\right], \tag{1.22}$$

(для примера на рис. 1.1 $\mathbf{v}^T = \left[x_3, x_5, x_6, \ldots, x_{N-2}\right]$; $\mathbf{w}^T = \left[x_1, x_2, x_4, x_7, \ldots, x_N\right]$. Тогда

$H = \left[I \;\; \vdots \;\; 0 \right]$; $\quad R_X = \begin{bmatrix} R_V & R_{VW} \\ R_{WV} & R_W \end{bmatrix}$, что позволяет преобразовать (1.21) к удобному виду: $G = \begin{bmatrix} R_V \\ \cdots \\ R_{WV} \end{bmatrix} \left(R_V + R_\theta \right)^{-1} = \begin{bmatrix} G_V \\ \cdots \\ G_W \end{bmatrix}$,

т.е. $\quad \hat{\mathbf{v}} = G_V\,\mathbf{z}$, $\;\hat{\mathbf{w}} = G_W\,\mathbf{z} = R_{WV} R_V^{-1} G_W \mathbf{z} = R_{WV} R_V^{-1} \hat{\mathbf{v}}$. (1.23)

Таким образом, исходную задачу оптимального восстановления можно редуцировать к двум последовательным задачам:

1) фильтрация наблюдаемой части последовательности;

2) «растягивание» полученных оценок на неизмеряемые области.

Очевидным следствием этого утверждения является декомпозиция ошибки оптимального восстановления:

$$\varepsilon = Tr\left[R_V - R_V \left(R_V + R_\theta \right)^{-1} R_V^T \right] + \left[R_W - R_{WV} \left(R_V + R_\theta \right)^{-1} R_{VW} \right] = Tr\,E_V + Tr\,E_W\,. \quad (1.24)$$

Первое слагаемое суммы (1.24) определяет ошибку винеровской фильтрации наблюдений, второе устанавливает ошибку экстраполяции оценок и допускает последующий анализ:

$$Tr\,E_W = Tr\left[R_W - R_{WV} R_V^{-1} R_V \left(R_V + R_\theta \right)^{-1} R_V R_V^{-1} R_{VW} \right] =$$

$$= Tr\left[R_W - R_{WV} R_V^{-1} R_{VW} \right] + Tr\left[R_{WV} R_V^{-1} E_V R_V^{-1} R_{VW} \right]. \quad (1.25)$$

Окончательно получим

$$\varepsilon = \varepsilon_\Phi^\Pi + \varepsilon_O^H + \varepsilon_Ш^H\,, \quad (1.26)$$

где ε_Φ^Π - ошибка фильтрации наблюдаемой части последовательности (при этом её наблюдения в принятой терминологии являются полными, а сама фильтрация может производиться независимо от последующих этапов обработки); ε_O^H - ошибка экстраполяции (оценивания ненаблюдаемой области), обусловленная самим фактом неполноты наблюдений, определяет достижимую точность восстановления (при $R_\theta = 0$); $\varepsilon_Ш^H$ - ошибка экстраполяции, обусловленная неидеальностью наблюдений (наличием аддитивного шума θ).

В одномерном случае достоинства двухэтапной процедуры интерполяции (1.23) сравнительно с исходной (1.21) лежат скорее в сфере описательной и заключаются в её большей наглядности. В работе [21] показано, что при обработке двумерных сигналов алгоритм (1.23) обеспечивает и значительные вычислительные преимущества.

Хорошо известна вычислительная экономичность рекуррентных алгоритмов оценивания [69]. С связи с этим следует проанализировать задачу (1.19) на возможность последовательного решения. Предположим, что восстанавливаемая последовательность $x_i, i=\overline{1,N}$ порождается динамической моделью, возбуждаемой белым шумом:

$$u_k = Fu_{k-1} + G\xi_k,\ x_k = Hu_k,\ z_k = H_k u_k + \theta_k, \qquad (1.27)$$

где u_k - вектор переменных состояния; F - матрица системы; G - входная матрица; H, H_k - модуляционные матрицы. Зависимость матрицы H_k от аргумента k обусловлена тем, что измерения производятся лишь на некотором подмножестве значений дискретного времени $k \in K_n$.

Полагая, что оптимальная последовательная оценка единственна и существует во всех точках интервала оценивания, можно воспользоваться калмановским результатом для моментов измерений [1, 4, 9, 69, 76, 106]:

$$\begin{aligned}
&\hat{u}_k = F\hat{u}_{k-1} + K_k\left(z_k - H_k F\hat{u}_{k-1}\right),\\
&P_{Эk} = FP_{k-1}F^T + GR_\xi G^T,\\
&K_k = P_{Эk}H_k^T\left(H_k P_{Эk} H_k^T + R_\theta\right)^{-1},\\
&P_k = \left(I - K_k H_k\right)P_{Эk},\\
&\hat{x}_k = Hu_k,\ H_k = H,\ k \in K_n.
\end{aligned} \qquad (1.28)$$

Здесь $P_k = M\left\{\left(u_k - \hat{u}_k\right)\left(u_k - \hat{u}_k\right)^T\right\}$ - дисперсионная матрица ошибки оценивания; $R_\xi = \sigma_\xi^2$ - дисперсия возбуждения; $R_\theta = \sigma_\theta^2$ - дисперсия шума измерений; K_k - оптимальное усиление.

Отсутствие измерений физически соответствует бесконечной дисперсии шума измерений. Поэтому для $k \notin K_n$ уравнения оценивания можно получить, используя (1.28) с $R_\theta = \infty$:

$$\widehat{u}_k = F\widehat{u}_{k-1}, \;\; P_k = P_{Эk} = FP_{k-1}F^T + GR_\xi G^T, \;\; \widehat{x}_k = Hu_k, \;\; k \notin K_n. \tag{1.29}$$

Удобнее, однако, интерпретировать (1.29) как результат эквивалентной подстановки: $R_\theta = \sigma_\theta^2$, $H_k = 0$. Этим наблюдения определяются во всех точках области анализа процесса x_k, т.е. неполные наблюдения сводятся к полным. Легко убедиться в применимости такого приема и для винеровского фильтра (1.20), (1.21).

Оптимальность решения (1.28), (1.29) на всем интервале времени обеспечивается заданием начальных условий

$$\widehat{u}_1 = M\{u_1\} = \mu, \;\; P_1 = M\left\{(u_1 - \mu)(u_1 - \mu)^T\right\}. \tag{1.30}$$

Уравнения (1.28)-(1.30) задают рекуррентный алгоритм оценивания, и оценка состояния формируется по текущему и предшествующим наблюдениям. Использование фильтра Калмана также позволяет строить оценки, учитывающие и будущие (относительно текущего времени) наблюдения [106]. Соответствующие алгоритмы являются двухэтапными процедурами и известны как алгоритмы сглаживания [4, 69]. Для рассматриваемой задачи наиболее полезным представляется алгоритм сглаживания с фиксированным интервалом [69], по существу являющийся представлением (1.21) в пространстве состояний и обеспечивающий винеровскую ошибку восстановления (1.24)

$$\widehat{\widehat{u}}_{k-1} = \widehat{u}_{k-1} + A_{k-1}\left(\widehat{\widehat{u}}_k - F\widehat{u}_{k-1}\right), \quad A_{k-1} = P_{k-1}F^T P_{Эk}^{-1}, \quad \widehat{\widehat{u}}_N = \widehat{u}_k, \quad \widehat{\widehat{x}}_k = H\widehat{\widehat{u}}_k. \tag{1.31}$$

Здесь $\widehat{\widehat{u}}_k, \widehat{\widehat{x}}_k$ - сглаженные (винеровские) оценки; $\widehat{u}_k$, $P_k, P_{Эk}$ определяются уравнениями (1.28)-(1.30), т.е. собственно сглаживанию (интерполяции) предшествует рекуррентная фильтрация последовательности x_k в прямом времени. Сглаженная оценка и дисперсия её ошибки вычисляются в обратном времени [4, 14, 69]. Последняя при этом задается соотношением

$$P_{k-1}^{*} = P_{k-1} + A_{k-1}\left(P_k^{*} - P_{Эk}\right)A_{k-1}^{T}, \quad P_N^{*} = P_N, \tag{1.32}$$

где $P_k^{*} = M\left\{\left(u_k - \hat{\hat{u}}_k\right)\left(u_k - \hat{\hat{u}}_k\right)^T\right\}$.

Двумерное восстановление. Рассмотрение начнем с самого общего случая, когда КФ изображения x_{mn}, $m, n = \overline{1, N}$ неразделима по координатам

$$M\left\{x_{mn}x_{kl}\right\} = R_X\left(m, n, k, l\right), \tag{1.33}$$

а M наблюдений распределены по изображению случайным образом. Для упорядоченного по строкам изображения винеровская оценка [1, 69] запишется как

$$\hat{\mathbf{X}} = R_X H^T\left(HR_X H^T + \sigma_\theta^2 I\right)^{-1}\mathbf{Z}, \tag{1.34}$$

где $\mathbf{X} = \left[x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1N}, x_{21}, \ldots, x_{N1}, \ldots, x_{N1}, \ldots, x_{NN}\right]^T$; $R_X = M\left\{\mathbf{XX}^T\right\}$ - корреляционная матрица изображения, определяемая по (1.33); σ_θ^2 - дисперсия аддитивного шума наблюдений; H - матрица наблюдений; $\mathbf{Z}$ - вектор наблюдений, образованный упорядоченными по строкам измеряемыми элементами изображения. Как видно из (1.34), оптимальный фильтр представляет собой $N^2 \times M$ матрицу линейного преобразования, что ведет к серьезным трудностям при вычислении оценок.

Оценку можно также получить с помощью альтернативного к (1.34) выражения, принимая во внимание лемму об обращении матриц [4], из которой следует

$$\hat{\mathbf{X}} = \left(\sigma_\theta^2 R_X^{-1} + H^T H\right)^{-1} H^T\mathbf{Z}. \tag{1.35}$$

Легко убедиться, что (1.35) еще более неудобно для вычислений, поскольку связано с обращением $N^2 \times N^2$ матрицы.

В отличие от случая полных наблюдений алгоритмы винеровского оценивания (1.34), (1.35) нельзя упростить даже при условии, что собственное преобразование R_X (преобразование Карунена-Лоэва) имеет быстрый алгоритм. Поэтому экономные с вычислительной точки зрения алгоритмы восстановления можно получить, либо переходя от (1.34), (1.35) к квазиоптимальным процедурам, либо налагая на R_X и H упрощающие ограничения.

Далее будем предполагать разделимость R_X и H. Переход от неразделимой корреляционной функции к факторизованной обсуждается в п. 1.2 и поэтому будем считать, что $R_X = R_W \otimes R_V$. Условие разделимости оператора наблюдения означает, что поле точечных измерений образует на изображении некоторую решетку (необязательно регулярную) и может быть записано как

$$Z = H_W X H_V + \theta . \tag{1.36}$$

Определив для каждого из изображений вектор, образованный последовательным упорядочением элементов изображения по строкам, получим

$$\mathbf{Z} = \left(H_W \otimes H_V^T\right)\mathbf{X} + \boldsymbol{\theta},$$

$$\widehat{\mathbf{X}} = \left(R_W H_W^T \otimes R_V H_V\right)\left(H_W R_W H_W^T \otimes H_V^T R_V H_V + \sigma_\theta^2 I\right)^{-1}\mathbf{Z} \tag{1.37}$$

Для (1.37) можно предложить удобную вычислительную процедуру, обобщающую алгоритм одномерного восстановления (1.23). Будем считать, что измерения на изображении X упорядочены так, что

$$H_W = \left[I \vdots 0\right],\ H_V^T = \left[I \vdots 0\right]. \tag{1.38}$$

В противном случае требуемую структуру матриц (1.38) обеспечит перестановка строк и столбцов X (ортогональное преобразование). Тогда

$$R_W H_W^T = \begin{bmatrix} R_{W*} \\ \dots \\ R_{WW*} \end{bmatrix},\quad R_V H_V = \begin{bmatrix} R_{V*} \\ \dots \\ R_{VV*} \end{bmatrix}, \tag{1.39}$$

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{X}} &= \begin{bmatrix} R_{W*} \\ \dots \\ R_{WW*} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} R_{V*} \\ \dots \\ R_{VV*} \end{bmatrix} \left(R_{W*} \otimes R_{V*} + \sigma_\theta^2 I\right)^{-1}\mathbf{Z} = \\ &= \begin{bmatrix} I \\ \dots \\ R_{WW*}R_{W*}^{-1} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} I \\ \dots \\ R_{VV*}R_{V*}^{-1} \end{bmatrix} \left(R_{W*} \otimes R_{V*}\right)\left(R_{W*} \otimes R_{V*} + \sigma_\theta^2 I\right)^{-1}\mathbf{Z} \end{aligned} \tag{1.40}$$

где R_{V*}, R_{W*} - корреляция элементов на решетке наблюдений по соответствующей координате; R_{VV*}, R_{WW*} - взаимная корреляция неизмеряемых элементов с элементами решетки соответственно по строке и столбцу изображения. Из (1.40) следует, что исходная задача восстановления сведена к последовательности процедур:

1) фильтрации поля измерений

$$\widehat{\mathbf{Z}} = \left(R_{W*} \otimes R_{V*}\right)\left(R_{W*} \otimes R_{V*} + \sigma_\theta^2 I\right)^{-1} \mathbf{Z}; \tag{1.41}$$

2) собственно восстановлению изображения

$$\widehat{X} = \begin{bmatrix} I \\ \cdots \\ R_{WW*}R_{W*}^{-1} \end{bmatrix} \widehat{Z}\left[I \vdots R_{V*}^{-1} R_{V*V}\right]. \tag{1.42}$$

Преимущества алгоритма (1.41), (1.42) сравнительно с исходным (1.37) очевидны:

1) на каждом из этапов восстановления решается задача пониженной размерности;

2) поле измерений образует на решетке «полные наблюдения», что позволяет использовать эффективные методы фильтрации;

3) восстановление изображения производится разделимым оператором (сам по себе винеровский фильтр неразделим даже для полных наблюдений (1.41)).

Следует отметить, что в практически важном случае биэкспоненциальной корреляции и при регулярной решетке наблюдений (т.е. покоординатно фиксированном шаге измерений) R_{V*}^{-1}, R_{W*}^{-1} трехдиагональны, что еще более упрощает вычисления.

Подобными (1.25) преобразованиями можно установить для фильтра (1.41), (1.42) ошибку восстановления. Как и в одномерном случае, ошибка восстановления допускает декомпозицию [21]

$$\varepsilon = \varepsilon_{\Phi} + \varepsilon_0^V + \varepsilon_0^W + \varepsilon_{Ш}^V + \varepsilon_{Ш}^W + \varepsilon_0^{VW} + \varepsilon_{Ш}^{VW},$$

где ε_{Φ} - ошибка фильтрации поля измерений;

$$\varepsilon_{\Phi} = Tr\ E^{*} = Tr\left[R_{W*} \otimes R_{V*} - R_{W*} \otimes R_{V*} \left(R_{W*} \otimes R_{V*} + \sigma_{\theta}^{2} I \right)^{-1} R_{W*} \otimes R_{V*} \right];$$

ε_0^V, ε_0^W - ошибка экстраполяции строк (столбцов) изображения, содержащих измерения, обусловленная неполнотой наблюдений;

$$\varepsilon_0^V = Tr\left[R_{W*} \otimes \left(R_V - R_{VV*} R_{V*}^{-1} R_{V*V} \right) \right], \quad \varepsilon_0^W = Tr\left[\left(R_W - R_{WW*} R_{W*}^{-1} R_{W*W} \right) \otimes R_{V*} \right].$$

$\varepsilon_{Ш}^V$, $\varepsilon_{Ш}^W$ - ошибка экстраполяции содержащих измерения строк (столбцов) изображения, вызванная аддитивным шумом измерений:

$$\varepsilon_{Ш}^V = Tr\left[\left(I \otimes R_{VV*} R_{V*}^{-1} \right) E^{*} \left(I \otimes R_{V*}^{-1} R_{V*V} \right) \right], \varepsilon_{Ш}^W = Tr\left[\left(R_{WW*} R_{W*}^{-1} \otimes I \right) E^{*} \left(R_{W*}^{-1} R_{W*W} \otimes I \right) \right];$$

ε_0^{VW} - ошибка восстановления области изображения, содержащей элементы, не измеряемые ни по одной из координат, определяется неполнотой измерений:

$$\varepsilon_0^{VW} = Tr\left[R_W \otimes R_V - R_{WW*} R_{W*}^{-1} R_{W*W} \otimes R_{VV*} R_{V*}^{-1} R_{V*V} \right];$$

$\varepsilon_{Ш}^{VW}$ - дополнительная ошибка восстановления неизмеряемой области изображения, обусловленная неидеальностью измерений:

$$\varepsilon_{Ш}^{VW} = Tr\left[\left(R_{WW*} R_{W*}^{-1} \otimes R_{VV*} R_{V*}^{-1} \right) E^{*} \left(R_{W*}^{-1} R_{W*W} \otimes R_{V*}^{-1} R_{V*V} \right) \right].$$

Легко убедиться, сравнив полученную ошибку восстановления с (1.26), что результаты одномерного восстановления применимы к двумерному случаю лишь при определении ε_0^V и ε_0^W. В остальном заимствование результатов исключается и связано оно с неразделимостью винеровского фильтра (1.41), а значит, и ошибки фильтрации E^{*}.

В рамках модели (1.36) отдельный интерес представляет случай, когда

$$H = H_W \otimes I, \tag{1.43}$$

т.е. когда искажениями «выбиты» некоторые строки изображения, тогда как остальные измеряются целиком.

Лексикографически упорядочим изображение по столбцам. Тогда

$$\widehat{\mathbf{X}} = \left(R_V \otimes R_W H_W^T \right) \left(R_V \otimes H_W R_W H_W^T + \sigma_{\theta}^2 I_N \otimes I_M \right)^{-1} \mathbf{Z},$$

где I_N и I_M - единичные матрицы размерности $N \times N$ и $M \times M$ соответственно.

Использование собственного преобразования R_V позволяет декоррелировать изображение по строкам, т.е. перейти к набору N одномерных задач восстановления [21]

$$R_V = \Phi \Lambda_V \Phi^T, \;\; \Lambda_V = diag\left[\lambda_1, \ldots, \lambda_N\right], \;\; \tilde{\mathbf{Z}} = \left(\Phi^T \otimes I\right)\mathbf{Z}, \quad \tilde{Z} = Z\Phi^T,$$

$$\hat{\tilde{\mathbf{X}}} = \left(\Lambda_V \otimes R_W H_W^T\right)\left(\Lambda_V \otimes H_W R_W H_W^T + \sigma_\theta^2 I_N \otimes I_M\right)^{-1} \tilde{\mathbf{Z}}. \tag{1.44}$$

Обратная матрица в (1.44) легко вычисляется, поскольку является блочной диагональной. Тогда для каждого столбца изображения получим

$$\hat{\tilde{\mathbf{x}}}_j = R_W H_W^T \lambda_j \left(\lambda_j H_W R_W H_W^T + \sigma_V^2 I_M\right)^{-1} \tilde{\mathbf{z}}_j, \;\; j = \overline{1,N} \quad \text{и} \quad \hat{X} = \hat{\tilde{X}}\Phi.$$

Следует заметить, что отыскание преобразования Карунена-Лоэва является сложной задачей и в (1.44) можно использовать асимптотически оптимальные синусоидальные преобразования, имеющие быстрые алгоритмы [21, 27]. Тогда вместо λ_j в (1.44) следует использовать энергетический спектр R_V в выбранном базисе.

Удобнее, однако, и при модели (1.43) сразу воспользоваться декомпозицией задачи восстановления. Тогда алгоритм восстановления ненаблюдаемых строк изображения по предварительно отфильтрованному полю измерений примет частный к (1.42) вид $\hat{X} = \begin{bmatrix} & I & \\ & \ldots\ldots & \\ R_{WW*} & R_{W*}^{-1} & \end{bmatrix} \hat{Z}$.

Обратимся еще раз к результату (1.42), представив его в удобном для анализа виде

$$\hat{X} = G_W \hat{Z} G_V = \hat{Z}_W G_V = G_W \hat{Z}_V, \tag{1.45}$$

где $\hat{Z}_W \left(\hat{Z}_V\right)$ означает экстраполированное по вертикали (горизонтали) поле измерений (отфильтрованных). С чисто вычислительной точки зрения разделимость восстанавливающего оператора в (1.45) означает, что при восстановлении i-й строки (столбца) изображения используются измеренные либо экстраполированные элементы только этой строки (столбца) изображения, т.е. элементы i-й строки $\widehat{Z}_W$ (i-го столбца $\widehat{Z}_V$). Это в свою очередь дает возможность независимого восстановления изображения по каждой строке (столбцу). Последнее обстоятельство позволяет строить эффективные по быстродействию процедуры восстановления изображений, основанные на последовательной технике оценивания [27, 43, 63, 85, 89].

Рассмотрим восстановление изображения с биэкспоненциальной КФ [21]

$$R_X(k,l) = \sigma^2 \rho^{|k|+|l|}$$

по измерениям, произведенным на произвольной регулярной решетке. Будем считать, что шум измерений отсутствует. В противном случае предполагается, что наблюдается (уже без шума) предварительно отфильтрованное поле измерений. Соответственно (1.45) опишем последовательный алгоритм восстановления изображения [21]:

1. Вычисление $\widehat{Z}_V$, т.е. построчное восстановление содержащих измерения строк изображения. Эта операция в свою очередь является двухэтапной процедурой (1.28)-(1.32):

а) фильтрация (формирование) очередной строки в $\widehat{Z}_V$

$$\tilde{z}_V(n,k) = \begin{cases} \rho \tilde{z}_V(n,k-1) & \text{\textit{для неизмеряемых элементов строки}} \\ z(n,j_k) & \text{\textit{в точках измерений}} \end{cases}$$

где запись j_k означает, что измерение k-го элемента строки имеет последовательный номер j, $k = \overline{2,N}$.

Начальное условие $(j_1 = 1)$

$$\tilde{z}_V(n,1) = \begin{cases} z(n,1), & \text{\textit{если первый элемент строки измеряется}} \\ 0, & \text{\textit{если не измеряется}} \end{cases}$$

б) сглаживание отфильтрованной (сформированной) строки

$$\hat{z}_V(n,k-1) = \tilde{z}_V(n,k-1) + a_V(k-1)\left(\hat{z}_V(n,k) - \rho \tilde{z}_V(n,k-1)\right),$$

$$a_V(k-1) = \rho P_V(k-1) / P_{ЭV}(k), \quad \hat{z}_V(n,N) = \tilde{z}_V(n,N), \ k = \overline{1,N-1}.$$

Коэффициенты $a_V(k)$ определяются через априорную и апостериорную дисперсии ошибки фильтрации

$$P_{ЭV}(k) = \rho^2 P_V(k-1) + (1-\rho^2)\sigma^2, \; k = \overline{2,N},$$

$$P_V(k) = \begin{cases} P_{ЭV}(k) \; \textit{для неизмеряемых точек} \\ 0 \; \textit{в точках измерений} \end{cases}$$

Начальные условия для $P_V(k)$ определяются значениями $\tilde{z}_V(n,1)$:

$$P_V(1) = \begin{cases} 0, \; \textit{если первый элемент строки измеряется} \; (j_1 = 1), \\ \sigma^2, \; \textit{если не измеряется} \end{cases}$$

В силу регулярности измерений коэффициенты $a_V(k), P_{ЭV}(k), P_V(k)$ для всех восстанавливаемых строк изображения одинаковы и определяются лишь однажды.

2. Восстановление изображения по столбцам (т.е. растягивание $\widehat{Z}_V$ по вертикали):

а) фильтрация (формирование) очередного столбца $\widehat{X}$

$$\tilde{x}(k,n) = \begin{cases} \rho\tilde{x}(k-1,n), \; \textit{если элементы } k-\textit{й строки} \\ \textit{исходного изображения не измеряются}, \\ \widehat{z}_V(i_k,n), \; \textit{если измеряются}, \end{cases}$$

$$\tilde{x}(1,n) = \begin{cases} \widehat{z}_V(1,n), \; \textit{если } i_1 = 1, \\ 0, \; \textit{если } i_1 \neq 1, \end{cases}$$

б) сглаживание отфильтрованного столбца

$$\widehat{x}(n,k-1) = \tilde{x}(n,k-1) + a_W(k-1)\big(\widehat{x}(n,k) - \rho\tilde{x}(n,k-1)\big),$$

$$a_W(k-1) = \rho P_W(k-1)/P_{ЭW}(k), \quad \widehat{x}(n,N) = \tilde{x}(n,N), \; k = \overline{1,N-1},$$

$$P_{ЭW}(k) = \rho^2 P_V(k-1) + (1-\rho^2),$$

$$P_W(k) = \begin{cases} P_{ЭW}(k), \; \textit{если элементы} k-\textit{й строки исходного} \\ \textit{изображения не измеряются} \; (i_k \; \textit{не определено}), \\ 0, \; \textit{если измеряются}, \; k = \overline{2,N}, \end{cases}$$

$$P_W(1) = \begin{cases} 0, \; если \; i_1 = 1, \\ 1, \; если \; i_1 \neq 1. \end{cases}$$

Коэффициенты $a_W(k), P_{ЭW}(k), P_W(k)$ не зависят от номера обрабатываемого столбца и определяются лишь однажды.

В заключение рассмотрим последовательные процедуры восстановления для каузальных и полукаузальных моделей (см. п. 1.2). Эти модели рассматриваются совместно, поскольку при векторном описании изображений они идентичны с точностью до матричных множителей и имеют вид

$$\mathbf{x}_j = F\mathbf{x}_{j-1} + G\,\xi_j, \tag{1.46}$$

где для модели К1 $F = L_1^{-1}L_2, \;\; G = L_1^{-1}$; для ПК1–ПК3 $F = Q^{-1}P, \; G = Q^{-1}$.

В (1.46) предполагается, что произведена статистическая декомпозиция модели за счет известных граничных условий, так что (1.46) описывает векторный марковский процесс и для обработки изображений можно непосредственно использовать результаты калмановской теории оценивания [14, 106].

Определим векторное наблюдение для каждого j:

$$\mathbf{z}_j = H_j\mathbf{x}_j + \theta_j, \tag{1.47}$$

где длина вектора $\mathbf{z}_j$ определяется числом измеряемых элементов в j-м столбце изображения. Расположение и число этих элементов определяют структуру матрицы H_j и количество её нулевых элементов. При отсутствии измерений в столбце матрица H_j полагается нулевой.

Оптимальные последовательная и сглаженная оценки при искажениях вида (1.47) определяются выражениями, аналогичными соответственно (1.28), (1.29) и (1.31). При этом начальные условия в (1.28), (1.29) определяются условием декомпозиции $\overline{\overline{x}} = 0$.

Отметим, что с увеличением размеров обрабатываемого изображения быстро возрастает сложность задачи восстановления, обусловленная необходимостью решения матричного уравнения Риккати большой размерности [69]. Использование ортогональных преобразований [21], позволяющих по (1.46) перейти к совокупности несвязанных скалярных уравнений, в случае неполных измерений дает некоторые вычислительные преимущества (связанные с вычислением дисперсии ошибки предсказания в (1.28)), однако не приводит к декорреляции ошибки фильтрации и, следовательно, к понижению размерности задачи.

Анализ алгоритма восстановления поля. На примере модельной задачи [21] выясним круг вопросов, которые должны рассматриваться исследователем при восстановлении полей в системах обработки изображений. Рассмотрим поле $u(t,s)$, описываемое уравнением [23, 66]

$$\frac{\partial u(t,s)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u(t,s)}{\partial s^2} + w(t,s), \quad s \in [0,1], \; t \geq 0, \tag{1.48}$$

где $w(t,s)$ - белый по пространству и времени шум возмущений. Граничные условия без потери общности предположим нулевыми: $u(t,0) = u(t,1) = 0$.

С помощью устройства ввода данных в ЭВМ непрерывному полю $u(t,s)$ ставится в соответствие дискретное $u(k,i)$ на некотором множестве точек пространственной области: $s = ih, \; t = k\tau, \; i = \overline{0, N+1}, \; k = 0,1,2,\ldots$

При этом необходимо выполнение следующих требований:

– выбранная дискретная модель должна хорошо аппроксимировать (1.48);

– алгоритм восстановления должен обеспечивать хорошее качество восстановления;

– алгоритм восстановления должен быть реализационно приемлемым (например, позволять вычислять оценки в реальном времени).

Ясно, что указанные условия являются противоречивыми. Так, увеличение точности дискретной аппроксимации ведет к увеличению размерности задачи восстановления, т.е. к ухудшению реализационных характеристик. Наоборот, при малой размерности вектора состояния можно получить хорошее качество восстановления, однако при этом ухудшаются аппроксимирующие свойства дискретной модели. В этом свете рациональный выбор алгоритма означает, что все требования приведены к некоторому соответствию, определяемому целью экспериментальных исследований.

Рассмотрим обоснование выбора рационального алгоритма восстановления. Для этого проанализируем каждое из перечисленных требований, рассматривая два альтернативных дискретных представления (1.48) – модели ПК1 и ПК2.

Анализ точности восстановления. При анализе точности в качестве аппроксимирующего (1.48) цифрового шаблона следует выбрать явную двухслойную схему (модель ПК1):

$$\mathbf{x}(k) = P\mathbf{x}(k-1) + \xi(k), \tag{1.49}$$

где $P(i,j) = \begin{cases} 1-2\alpha r, \ i=j, \\ \alpha r, \ |i-j|=1 \end{cases}$ - трехдиагональная теплицева матрица, $r = \tau / h^2$.

Будем считать, что наблюдения производятся совокупностью M неидеальных датчиков, расположенных в некоторых пространственных точках $l_i, \ i=\overline{1,M}$ и описываемых уравнениями вида

$$\mathbf{w}_i(k+1) = B_i \mathbf{w}_i(k) + G_i x(k,l)$$

или

$$\mathbf{w}_i(k+1) = B_i \mathbf{w}_i(k) + G_i H_i^T \mathbf{x}(k), \tag{1.50}$$

где $H_i^T = [0 \ldots 1_i \ldots 0]$ - вектор, ненулевой элемент которого соответствует точке расположения i-го датчика (l_i). Матрица B_i и вектор G_i описывают преобразование процесса $u(k,l_i)$, производимое i-м датчиком. Модель наблюдения пространственного сечения поля на выходе датчика имеет вид

$$\mathbf{z}_i(k) = C_i \mathbf{w}_i(k) + \theta_i(k), \ i=\overline{1,M}, \tag{1.51}$$

где C_i – матрица наблюдения; $\theta_i(k)$ - шум наблюдения (белый).

В монографии [11] предложена идея учета неидеальных измерений процесса, описываемых уравнениями вида (1.50), (1.51), путем расширения вектора состояния за счет динамических моделей измерителей. Используя эту идею, запишем уравнения расширенной системы для решаемой задачи:

$$\mathbf{u}^T(k)=\left[\mathbf{x}^T(k),\ \mathbf{w}_1^T(k),\dots,\mathbf{w}_M^T(k)\right],\quad \mathbf{u}(k)=\tilde{F}\mathbf{u}(k-1)+\tilde{G}\,\xi(k),$$

$$\mathbf{z}(k)=\tilde{C}\mathbf{u}(k)+\theta(k),\tag{1.52}$$

где $\tilde{F}, \tilde{G}, \tilde{C}$ - клеточные матрицы:

$$\tilde{F}=\begin{bmatrix} P & 0 & \dots & 0 \\ G_1H_1^T & B_1 & \dots & 0 \\ G_2H_2^T & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ G_MH_M^T & 0 & \dots & B_M \end{bmatrix},\quad \tilde{G}=\begin{bmatrix} I \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix},\quad \tilde{C}=\left[\begin{array}{c|cccc} 0 & C_1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & C_2 & \cdots & 0 \\ & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & 0 & 0 & \cdots & C_M \end{array}\right].$$

Алгоритм восстановления поля представляет собой последовательную калмановскую процедуру (1.28). В работе [21] анализ этого алгоритма проведен при следующих значениях параметров: $N=9, \alpha=1, \tau=1, r=0.1$, $M\left\{\xi(k)\xi^T(k)\right\}=Q(k)=I$. Датчики описывались уравнениями первого порядка. Среднеквадратическая погрешность

$$\overline{\varepsilon}_i^2=M\left\{\left(\mathbf{w}_i(k)-H_i^T\mathbf{x}(k)\right)^2\right\}\Big/M\left\{\left(H_i^T\mathbf{x}(k)\right)^2\right\},$$

вносимая датчиком в регистрируемый сигнал. Отдельно рассматривался случай идеальных (неискажающих) датчиков. Получены зависимости числа датчиков и общего числа отсчетов сетки при обработке в реальном времени при различных шагах дискретизации τ.

В работах [123, 126] описаны разнообразные алгоритмы стохастической интерполяции случайных последовательностей и полей, а также их КФ. В работе [55] рассмотрена задача восстановления ненаблюдаемого двумерного СП в каждой точке прямоугольника по известным значениям (на всем прямоугольнике) наблюдаемого поля, которое представляет собой смесь ненаблюдаемого поля и помехи типа белого шума. В случае, когда ненаблюдаемое поле формируется с помощью дифференциального уравнения гиперболического типа (каузальная модель) для оптимальной (в смысле среднеквадратичной ошибки) оценки ненаблюдаемого поля, получено стохастическое уравнение с краевыми условиями.

В работе [54] для восстановления одного из пропущенных значений $x(t+\tau)$ временного ряда $x(t)$, являющегося реализацией многомерного стационарного процесса с дискретным временем, предлагается линейная интерполяционная форма в виде

$$\widehat{x}(t+\tau)=\sum_{j=1}^{p}\left[\alpha_j x(t-j)+\beta_j x(t+T+j)\right],$$

где α_j и β_j - подлежащие определению числовые матрицы, T - длина пропуска $(0\le\tau\le T)$. Построена система нормальных уравнений относительно α_j и β_j согласно принципу наименьших квадратов. При условии, что реальный временной ряд моделируется процессом авторегрессии порядка p, для такой системы, записанной в терминах коэффициентов прогноза вперед и назад, развита итерационная процедура решения и доказана её сходимость для широкого класса случайных процессов.

В работе [36] представлено статистическое описание процедуры дискретизации-восстановления реализаций нестационарных гауссовых случайных процессов по совокупности дискретных отсчетов. Получены аналитические выражения для соответствующих восстанавливающих функций и погрешностей восстановления, которые представляют собой довольно сложные зависимости.

В работе [91] рассмотрен синтез рекуррентного адаптивного алгоритма интерполяции непрерывной марковской последовательности, заданной линейным уравнением авторегрессии, в условиях нестационарной параметрической неопределенности. Показано, что данный алгоритм приближается по эффективности к оптимальному байесовскому при увеличении ОСШ.

При рассмотрении методов интерполяции СП в данной работе предпочтение было отдано таким методам интерполяции СП на многомерных сетках, которые позволяют применять для интерполяции методы теории оптимальной линейной фильтрации, позволяющие в ряде случаев существенно снизить вычислительные затраты и повысить точность интерполяции на основе зашумленных наблюдений. В результате за рамками изложения остались методы линейной и квадратичной интерполяции [33, 71, 90], полиномы Лагранжа [67, 90], а также множество методов, связанных с интерполяцией с помощью сплайнов [2, 8, 28, 35, 82, 102], в частности кубических интерполирующих сплайнов и B-сплайнов [97, 115, 117, 118, 125], а также ряд статистических методов [26, 48], которые применяются в задачах восстановления зависимостей по отдельным значениям, а также задачах связанных с наилучшим приближением (аппроксимацией) функциональных зависимостей.

1.4. Оптимальное позиционирование измерителей

В тех случаях, когда восстановление СП по неполным измерениям производится при ограничении на число измерителей, а сам характер их расположения заранее не фиксирован, естественным образом возникает задача оптимального размещения измерителей (изображены на рис. 1.2 в виде черных кружков). В монографии [21] оптимальным считается такое расположение датчиков, при котором минимизируется среднеквадратическая ошибка восстановления изображения.

В работах [95, 100, 105, 116, 124] рассматривается размещение измерителей на континуальной области и для решения используется разложение по собственным функциям соответствующей граничной задачи. Подход, развиваемый в работе [21] также основан на эквивалентном представлении моделей изображений (полей) посредством неособого преобразования состояний. При этом всегда предполагается, что проведена статистическая декомпозиция модели.

В работах [105, 116] описаны градиентные алгоритмы, позволяющие получить близкое к оптимальному решение данной задачи для полукаузальных и некаузальных моделей СП. Показано, что использование дискретного синусного преобразования (ДПС) позволяет существенно снизить вычислительные затраты при некотором увеличении дисперсии ошибки оценивания. Однако описываемые градиентные алгоритмы не всегда позволяют достичь глобально оптимального решения и зачастую выдают локально оптимальное решение за глобально оптимальное. Кроме этого, в этих алгоритмах используется критерий оптимальности, заключающийся в минимизации следа матрицы ковариаций ошибок оценивания $J = Tr\ P_j \to \min$, в то время как зачастую возникает необходимость разработки алгоритмов, имеющих критерием оптимальности минимум максимальной дисперсии ошибки оценивания на всем СП $J = P_{j\,\max} \to \min$.

Задача поиска оптимального плана размещения датчиков относится к классу комбинаторных задач [3, 38, 64]. Подобные задачи решаются методами дискретной (целочисленной) оптимизации [39, 65]. В наиболее общей форме задача целочисленной оптимизации имеет следующий вид: найти вектор $\mathbf{x}$ с неотрицательными компонентами x_j, $j=1,\ldots,n$, который минимизирует целевую функцию $f\left(x_1,\ldots,x_n\right)$ при некоторых ограничениях $g_i\left(x_1,\ldots,x_n\right)$, $i=1,\ldots,m$, обусловленных спецификой задачи. С геометрической точки зрения ищется точка с целочисленными координатами в области, которая удовлетворяет ограничениям (в так называемой области допустимых значений) и минимизирует f. В задаче, рассматриваемой в данной работе, требуется определить вектор $\mathbf{x}$, компоненты которого принимают только двоичные значения 0 или 1; в этом случае говорят о бивалентном программировании [65]. При этом целевой функцией f является максимальная дисперсия ошибки оценивания, а вектор $\mathbf{x}$ представляет собой план оптимального размещения датчиков (рис. 3.8, б). Некоторые частные случаи решения данной задачи

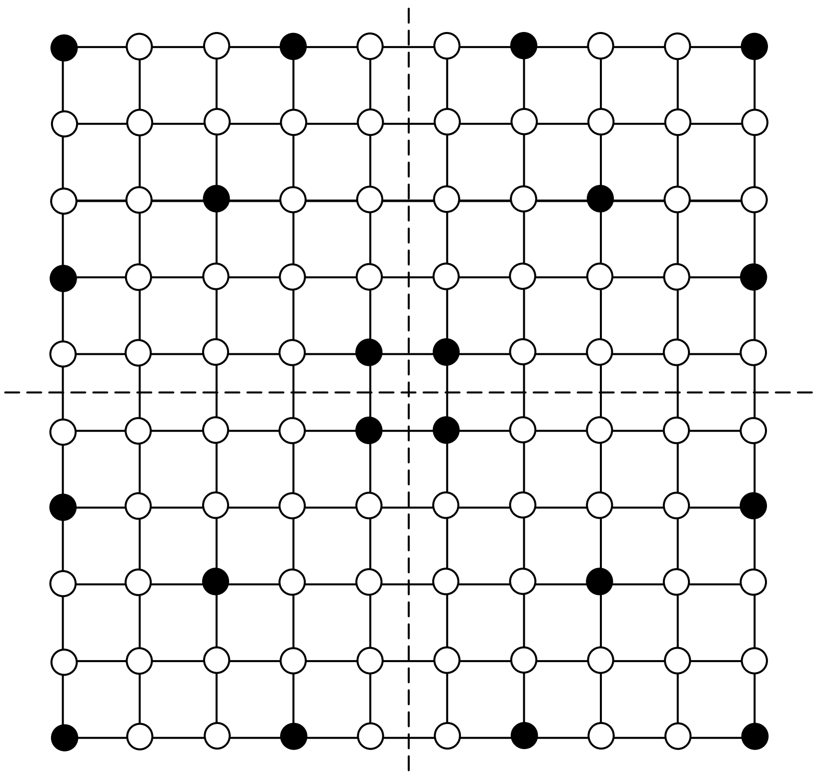


Рис. 1.2

рассмотрены более подробно в п. 3.3.

Среди зарубежных работ, касающихся оптимизации размещения пилот-сигналов в системах мобильной связи можно выделить следующие: [94, 119, 128]. Следует отметить работу [107], в которой получены границы Рао-Крамера для минимальной дисперсии ошибки оценивания для различных планов расположения пилот-сигналов, в том числе и оптимальных в смысле минимума максимальной дисперсии ошибки интерполяции СП.

В работе [21] сделан ряд качественных выводов относительно оптимизации размещения датчиков:

а) оптимальным оказывается некоторое промежуточное расположение датчиков, когда они достаточно удалены от известной границы, достаточно пространственно разнесены, т.е. сигналы с них мало коррелированны, и когда обеспечивается хорошее качество измерений, т.е. велико значение ОСШ в точках измерений;

б) дальнейшее (сравнительно с оптимальным вариантом) сближение датчиков увеличивает ошибку восстановления, поскольку усиливается пространственная зависимость регистрируемых данных;

в) разнесение датчиков также ведет к ухудшению качества восстановления. Оно вызвано приближением датчиков к известной границе. При этом, хотя и обеспечивается независимость измерений, резко ухудшается их качество по критерию ОСШ.

Однако, следует учесть, что эти выводы сделаны с точки зрения минимизации следа матрицы ковариаций ошибок оценивания $J = Tr\ P_j \to \min$, в то время как в настоящей работе критерием оптимальности служит минимум максимальной дисперсии ошибки оценивания СП $J = P_{j\,\max} \to \min$.

На основании вышеизложенного можно сделать вывод о том, что в настоящее время приемлемые для практики методы поиска оптимального плана размещения датчиков на дискретной сетке разработаны недостаточно и требуется построение соответствующих строго оптимальных алгоритмов.

1.5. Выводы

1. Анализ различных авторегрессионных моделей случайных полей, широко применяемых в приложениях, показал, что для представления многомерных СП наиболее предпочтительным является класс моделей авторегрессии с разделимой КФ, поскольку это один из немногих классов моделей, для которого можно разработать оптимальные алгоритмы дискретной фильтрации и реализовать их на ЭВМ.

2. Анализ существующих методов интерполяции СП показывает, что на сегодняшний день отсутствуют алгоритмы, сочетающие в себе высокую эффективность интерполяции и приемлемое быстродействие, позволяющее вести обработку данных в реальном времени. Целью дальнейших исследований должна быть разработка эффективных алгоритмов интерполяции СП по неполным наблюдениям, а также анализ погрешностей интерполяции для однородных СП с разделимой КФ при различных коэффициентах корреляции и с различным уровнем шумов наблюдения.

3. Проведенный анализ известных методов размещения измерителей на многомерной сетке показывает, что в настоящее время отсутствуют эффективные с точки зрения вычислительных затрат и оптимальные в смысле минимума максимальной дисперсии ошибки интерполяции СП методы размещения датчиков, позволяющие осуществлять интерполяцию СП в реальном времени.

4. Таким образом, представляются важными следующие задачи:

- Проведение сравнительного анализа известных алгоритмов интерполяции одно- и двумерных СП.
- Разработка алгоритмов интерполяции СП с использованием оптимальных оценок. Получение оценок относительной дисперсии ошибки интерполяции СП при различных параметрах СП.
- Синтез алгоритмов поиска оптимального плана размещения датчиков на одно- и двумерной дискретных сетках. Количественная оценка

преимуществ оптимального плана размещения датчиков по сравнению со случаем регулярного размещения.

- Выработка рекомендаций относительно количества размещаемых датчиков на сетке заданных размеров в зависимости от требуемого качества интерполяции.
- Осуществление программной реализации вышеуказанных алгоритмов интерполяции и размещения датчиков с возможностью их модификации для различных прикладных задач.

ГЛАВА 2. АЛГОРИТМЫ ИНТЕРПОЛЯЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ НА МНОГОМЕРНЫХ СЕТКАХ

2.1. Постановка задачи

Во многих современных информационных системах используется представление массивов поступающих данных в виде многомерных изображений (случайных полей) [52, 89]. Одной из важных проблем обработки многомерных данных является восстановление всех значений случайного поля (СП) $X = \left\{ x\left(\overline{u}\right), \overline{u} \in R^N \right\}$, по наблюдениям суммы информационного СП и белого шума

$$z\left(\overline{u}_k\right) = x\left(\overline{u}_k\right) + \theta\left(\overline{u}_k\right),\ \overline{u}_k \in G,\ k = 1, 2, ..., n, \tag{2.1}$$

в n точках. При этом возникают задачи построения наилучших оценок $\widehat{x}\left(\overline{u}\right)$, $\overline{u} \in R^N$, выбора числа и расположения точек в пространстве, а также анализа погрешностей восстановления СП по дискретным данным. Значимость рассматриваемого класса задач обусловлена широким спектром практических приложений для решения проблем экологического мониторинга, восстановления медицинских изображений, построения динамических карт амплитудно-фазовых искажений в системах мобильной связи.

Вначале предположим, что область G совпадает со всем пространством R^N. Тогда для однородного СП все наблюдения оказываются равноценными и должны производится в узлах бесконечной N-мерной сетки отсчетов $\overline{J} = \left\{ \overline{j} = \left(j_1, j_2, \ldots, j_N \right)^T : \left\{ j_k = \overline{1 \ldots M_k} \right\}, k = \overline{1 \ldots N} \right\}$. При этом корреляционная функция (КФ) может быть задана на сетке $\overline{J}$ в виде

$$B_x\left(\overline{r}\right) = M\left\{ \left(x_{\overline{j}} - m_x \right) \left(x_{\overline{j}+\overline{r}} - m_x \right) \right\}.$$

В случае гауссовской модели наблюдений наилучшее в смысле минимума дисперсии ошибок восстановление $x\left(\overline{u}\right)$ по наблюдениям

$z(\bar{j}) = x(\bar{j}) + \theta(\bar{j}),\ \bar{j} \in \bar{J}$, осуществляется с помощью фильтра Винера: $\hat{x}(\bar{u}) = \sum_{\bar{j} \in \bar{J}} h_{\bar{j}}(\bar{u}) z_{\bar{j}}$, где весовые коэффициенты $h_{\bar{j}}(\bar{u}),\ \bar{j} \in \bar{J}$, находятся из многомерного аналога уравнения Винера-Хопфа:

$$h_{\bar{l}}(\bar{u})\sigma_x^2 + \sum_{\bar{j} \in \bar{J}} h_{\bar{j}}(\bar{u}) B_x(\bar{j} - \bar{l}) = B(\bar{l}, \bar{u}),\ \bar{l} \in \bar{J}. \quad (2.2)$$

Решение может быть найдено с помощью N-мерного z-преобразования: $H(\bar{\lambda}, \bar{u}) = f_x(\bar{\lambda}) \big/ \left(\sigma_x^2 + f_x(\bar{\lambda}, \bar{u})\right)$, а минимально достижимая дисперсия ошибки такого восстановления

$$\sigma_{\varepsilon(\bar{u})}^2 = \sigma_x^2 h_{\bar{l}=0}(\bar{u}) = \sigma_x^2 \int_{-\pi}^{\pi} \ldots \int_{-\pi}^{\pi} H(\bar{\lambda}, \bar{u}) d\bar{\lambda}. \quad (2.3)$$

Анализ показал, что точные результаты удается получить только для разделимых СП с экспоненциальными КФ для точек $\bar{u}$, совпадающих с узлами многомерной сетки.

Наибольший практический интерес представляет значение максимальной дисперсии ошибки восстановления, соответствующей центральной точке $\bar{u}$, равноудаленной от имеющихся отсчетов наблюдений $z_{\bar{j}}$ на многомерной сетке $\bar{j} \in \bar{J}$. В общем случае для получения такой интерполяционной оценки требуются существенные вычислительные затраты, связанные с учетом всех имеющихся наблюдений $z_{\bar{j}}$. Однако, в инженерных приложениях часто возникает необходимость в алгоритмах интерполяции, требующих сравнительно малые вычислительные затраты. В связи с этим возникает задача оценки потенциальной точности алгоритмов интерполяции по малому количеству наблюдений при различных параметрах сигнала $x(\bar{u}_k)$ и шума $\theta(\bar{u}_k)$. В данной главе представлен сравнительный анализ эффективности различных алгоритмов получения оптимальных линейных интерполяционных оценок для случая однородных гауссовских СП.

2.2. Анализ погрешностей интерполяции многомерных случайных полей по незашумленным наблюдениям

Рассмотрим задачу интерполяции для однородного СП, $X=\left\{x_{\bar{j}},\ \bar{j}\in J\right\}$ определенного на N-мерной прямоугольной сетке отсчетов $J=\left\{\bar{j}=\left(j_1,j_2,\ldots,j_N\right)^T:\left\{j_k=\overline{1\ldots M_k}\right\},k=\overline{1\ldots N}\right\}$ с разделимой КФ и имеющего вектор коэффициентов корреляции $\bar{\rho}=\left(\rho_{j_1},\rho_{j_2},\ldots,\rho_{j_N}\right)^T$ вдоль соответствующих осей координат [129, 130, 131].

Задача заключается в оценке потенциально достижимой точности интерполяции. Очевидно, что наибольшая погрешность интерполяции имеет место в центре, как наиболее удаленной точке от всех наблюдений.

Наблюдения на N-мерной прямоугольной сетке $\bar{J}$ представляют собой аддитивную смесь полезного сигнала и белого гауссовского шума:

$$z_{\bar{j}}=x_{\bar{j}}+\theta_{\bar{j}}, \qquad (2.4)$$

где $\bar{j}=\left(j_1,j_2,\ldots,j_N\right)$, $x_{\bar{j}}$ - полезный сигнал, заданный в общем случае многомерным уравнением авторегрессии-скользящего среднего (1.8), $\theta_{\bar{j}}$ - белый гауссовский шум с нулевым средним и дисперсией σ_θ^2.

Интерполяционную оценку $\hat{x}_0=f\left\{x_{\bar{j}},\theta_{\bar{j}},\ \bar{j}\in\bar{J}\right\}$ в N-мерном непрерывном пространстве $R^N=\left\{\bar{u}=\left(u_1,u_2,\ldots,u_N\right):\left\{-\infty<u_k<\infty\right\},k=\overline{1\ldots N}\right\}$, соответствующем N-мерной прямоугольной сетке $\bar{J}$, можно сформировать в виде линейной комбинации зашумленных наблюдений $z_{\bar{j}}$ с соответствующими весовыми коэффициентами $\alpha_{\bar{j}}$:

$$\hat{x}_0=\sum_{j_1=1}^{M_1}\sum_{j_2}^{M_2}\ldots\sum_{j_N}^{M_N}\alpha_{\bar{j}}z_{\bar{j}}. \qquad (2.5)$$

В дальнейшем под интерполяционной оценкой подразумевается оценка $\hat{x}_0$ в центре между равноотстоящими наблюдениями $z_{\bar{j}}$ в N-мерном пространстве R^N.

Оптимальность алгоритма рассматривается в смысле минимума дисперсии ошибки оценивания

$$\sigma_{\varepsilon}^{2} = M\left\{\left(\widehat{x}_0 - x_0\right)^2\right\} = M\left\{\widehat{x}_0^2\right\} - 2M\left\{\widehat{x}_0 x_0\right\} + \sigma_X^2, \tag{2.6}$$

по параметрам линейной комбинации (2.5).

Рассмотрим решение задачи нахождения минимума максимальной дисперсии ошибки восстановления для различных ситуаций. Вначале предположим, что восстанавливается случайный процесс $x_{\overline{u}}$ по наблюдениям $z_k = x_k + \theta_k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$в равноотстоящих точках СП $u_k = k\Delta u$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, ..$. В этом случае для СП с экспоненциальной КФ установившаяся дисперсия ошибки фильтрации $P = M\left\{\left(\widehat{x}_k - x_k\right)^2\right\}$ может быть найдена по формуле [89] $\dfrac{P}{\sigma_x^2} = \dfrac{\left(1-\rho^2\right)}{2\rho^2 q}\left(\sqrt{1 + \dfrac{4\rho^2 q}{\left(1-\rho^2\right)\left(1+q\right)^2}} - 1\right)$,

где $q = \sigma_x^2 / \sigma_\theta^2$; $\sigma_\theta^2 = M\left\{\theta_k^2\right\}$; $\rho = M\left\{x_k\, x_{k-1}\right\} / \sigma_x^2$; $\sigma_x^2 = M\left\{x_k^2\right\}$. После интерполяции дисперсия ошибки P_u уменьшается и находится с помощью известных формул [16, 69]:

$$P_u = P_Э + \left(P_Э\, \rho\, P_Э^{-1}\right)^2 \left(P_u - P_Э\right), \tag{2.7}$$

где $P_Э = \rho^2 P + \sigma_x^2\left(1-\rho^2\right)$. Наконец, установившаяся дисперсия ошибки в середине интервала может быть найдена из уравнения: $P_{uc} = P_{Эc} + \left(P_{Эc}\sqrt{\rho} P_Э^{-1}\right)^2 \left(P_u - P_{Эc}\right)$. Полученные соотношения позволяют определить максимальную дисперсию ошибки восстановления одномерного СП

$$P_{uc} = M\left\{\left(\hat{x}\left(k\Delta u + \frac{\Delta u}{2}\right) - x\left(k\Delta u + \frac{\Delta u}{2}\right)\right)^2\right\}$$

при любых параметрах информационного СП и помехи.

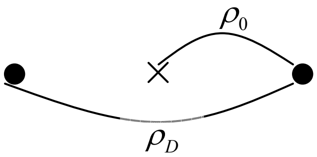


Рис. 2.1

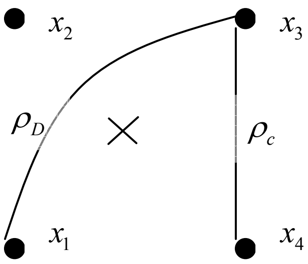


Рис. 2.2

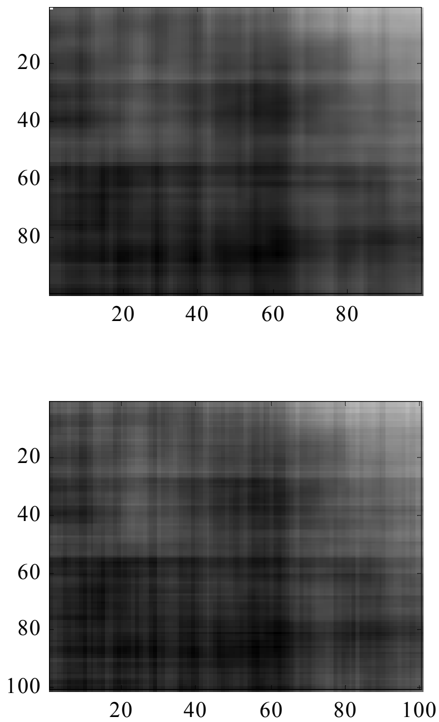


Рис. 2.3

В случае равноотстоящих наблюдений интерполяционная оценка формируется на основе ближайших симметричных относительно центра $K = 2^N$ отсчетов: $\widehat{x}_0 = \sum_{i=1}^{K} \alpha_i x_i$, поэтому можно считать $\alpha_i = \alpha$. Минимальная дисперсия ошибки интерполяции вычисляется из условия $\frac{d\sigma_\varepsilon^2}{d\alpha} = 0$.

На рис. 2.3 снизу показано исходное изображение с отчетливо видными полосами, отражающими пропущенные отсчеты. На том же рисунке сверху показано изображение, восстановленное по неполным наблюдениям по формуле $\widehat{x}_0 = \sum_{i=1}^{K} \alpha_i x_i$ при нулевых ошибках в узлах СП (рис. 2.1, 2.2), из чего видно сглаживание пропущенных отсчетов посредством интерполяции.

На рис. 2.4 показаны зависимости относительной дисперсии ошибки интерполяции от расстояния между известным и интерполируемым отсчетами при отсутствии шума $\sigma_\theta^2 = 0$, если за начало отсчета взять определенный известный отсчет для случая двух наблюдений, полученные по формуле

$$\frac{\sigma_{\varepsilon 0}^2}{\sigma_x^2}(i) = \left(1 - \frac{\rho\left(\rho^{2\frac{N_\Delta - i}{N_\Delta}} + \rho^{2\frac{i}{N_\Delta}}\right)}{1+\rho^2} \right), \; i = 1 \ldots N_\Delta . \tag{2.8}$$

При этом условное расстояние между отсчетами $N_\Delta = 200$.

Относительно простые выводы для полей произвольной размерности могут быть сделаны при условии отсутствия погрешностей наблюдения $\sigma_\theta^2 = 0$ [131].

Вначале рассмотрим интерполяцию по наблюдению в одной точке $\widehat{x}_0 = \alpha x_1$, $\sigma_\varepsilon^2 = M\left\{\left(\alpha x_1 - x_0\right)^2\right\} = \alpha^2\sigma_x^2 - 2\alpha\rho_0\sigma_x^2 + \sigma_x^2$, $\frac{\partial \sigma_\varepsilon^2}{\partial \alpha} = 2\alpha\sigma_x^2 - 2\rho\sigma_x^2 = 0, \; \alpha = \rho,$ при этом дисперсия ошибки интерполяции в центре равна $\sigma_{\varepsilon 0}^2 = \sigma_x^2\left(1 + \rho^2 - 2\rho^2\right) = \sigma_x^2\left(1 - \rho^2\right)$ и если $\rho = 1 - \gamma$, где $\gamma \ll 1$, то $\frac{\sigma_{\varepsilon 0}^2}{\sigma_x^2} \cong 2\gamma$.

Дисперсия ошибки интерполяции между двумя точками (рис. 2.1) находится из формулы

$$\sigma_\varepsilon^2 = M\left\{\left(\alpha\sum_{i=1}^{2} x_i - x_0\right)^2\right\} = \alpha^2 \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} M\left\{x_i x_j\right\} - 2\alpha \sum_{i=1}^{2} M\left\{x_i x_0\right\} + \sigma_x^2,$$

где $\alpha = \frac{\sum_{i=1}^{2} M\left\{x_i x_0\right\}}{\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} M\left\{x_i x_j\right\}} = \frac{\rho_0}{1+\rho_D}$. При этом дисперсия ошибки интерполяции по двум точкам имеет вид $\sigma_{\varepsilon 0}^2 = \sigma_x^2 - \alpha\sum_{i=1}^{2} M\left\{x_i x_0\right\} = \sigma_x^2\left(1 - \frac{2\rho_0^2}{1+\rho_D}\right)$. В случае множительной КФ весовые коэффициенты $\alpha = \frac{\rho}{1+\rho^2}$ и соответствующая дисперсия $\sigma_{\varepsilon 0}^2 = \sigma_x^2 \left(1 - \frac{2\rho^2}{1+\rho^2}\right)$. Если $\rho = 1-\gamma$, то $\frac{\sigma_{\varepsilon 0}^2}{\sigma_x^2} \cong 1 - \frac{(1-2\gamma)}{(1-\gamma)} \cong \gamma$.

Таким образом, в случае двух узлов с наблюдениями относительная дисперсия оценок составляет $\gamma = 1-\rho$ при высоких коэффициентах корреляции за счет отхода от точки с высоким качеством оценивания. Действительно, уход на $1-\rho = 0.1$ дает $\sigma_\varepsilon^2 = 0.1\sigma_x^2$, т.е. $\sigma_\varepsilon^2 = 0.31\sigma_x$. Если же $\sigma_\varepsilon = 0.1\sigma_x$, то $\sigma_\varepsilon^2 = 0.01\sigma_x^2$ и $\rho = 0.99$.

Рассмотрим точность интерполяции при нулевых ошибках наблюдения в случае четырех узлов (рис. 2.2). Линейная интерполяционная оценка имеет вид $\hat{x}_0 = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i x_i$ и соответствующая дисперсия ошибки интерполяции минимальна, если $\sum_{j=1}^{4} \alpha_j M\{x_i x_j\} = M\{x_i x_0\}$, $i, j = 1,2,3,4$.

Для случая, когда интерполяционная оценка вычисляется в середине, $M\{x_i x_0\} = \sigma_x^2 \rho_0$ и коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и α_4 находятся как решение системы уравнений

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2\rho_c + \alpha_3\rho_D + \alpha_4\rho_c = \rho_0 \\ \alpha_1\rho_c + \alpha_2 + \alpha_3\rho_c + \alpha_4\rho_D = \rho_0 \\ \alpha_1\rho_D + \alpha_2\rho_c + \alpha_3 + \alpha_4\rho_c = \rho_0 \\ \alpha_1\rho_c + \alpha_2\rho_D + \alpha_3\rho_c + \alpha_4 = \rho_0 \end{cases}.$$

В произвольной точке внутри квадрата, составленного из наблюдений x_1, x_2, x_3, x_4, коэффициенты корреляции будут различны и система уравнений примет вид

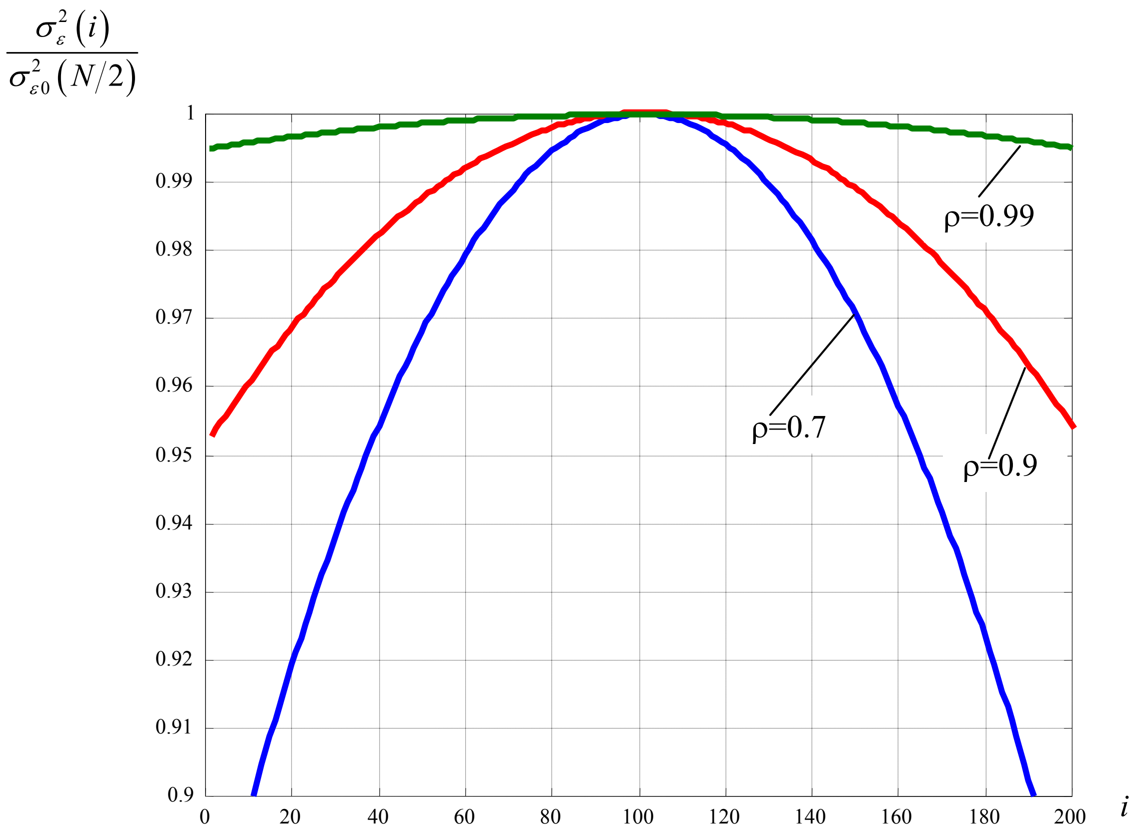
$\wp\,\bar{\alpha} = \rho_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, где $\wp = \begin{pmatrix} 1 & \rho_c & \rho_D & \rho_c \\ \rho_c & 1 & \rho_c & \rho_D \\ \rho_D & \rho_c & 1 & \rho_c \\ \rho_c & \rho_D & \rho_c & 1 \end{pmatrix}$. Если же рассматривать оценку в центре, то $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$ и тогда $\sigma_\varepsilon^2 = M\left\{\left(\alpha\sum_{i=1}^{4} x_i - x_0\right)^2\right\} = 0$,

где $\alpha = \dfrac{\sum_{j=1}^{4} M\{x_i x_0\}}{\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} M\{x_i x_j\}} = \dfrac{\rho_0}{(2\rho_c + \rho_D + 1)}$. В случае множительной КФ $\rho_0 = \rho$, $\rho_c = \rho,\ \rho_D = \rho^2$ и $\alpha = \rho \big/ (1+\rho)^2$. Найдем минимальную дисперсию, имея $\alpha\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} M\{x_i x_j\} = \sum_{i=1}^{4} M\{x_i x_0\}$, откуда $\sigma_{\varepsilon 0}^2 = \sigma_x^2\left(1 - \dfrac{4\rho_0^2}{1 + 2\rho_c + \rho_D}\right)$. В случае множительной КФ $\sigma_{\varepsilon 0}^2 = \sigma_x^2\left(1 - \dfrac{4\rho^2}{(1+\rho)^2}\right)$. Если $\rho = 1-\gamma,\ \gamma \ll 1$, то

$$\frac{\sigma_{\varepsilon\min}^2}{\sigma_x^2} \cong 1 - \frac{4(1-2\gamma)}{4(1-0.5\gamma)^2} \cong \gamma .$$

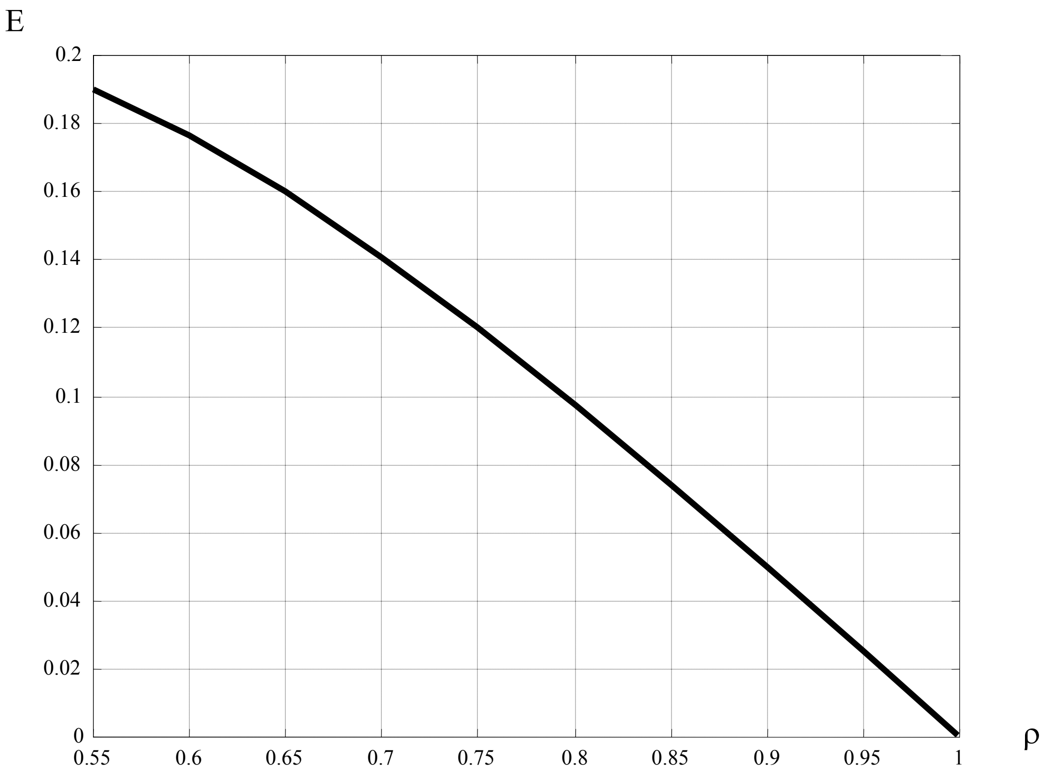
На основании проведенного анализа можно сделать вывод, что дисперсия ошибки интерполяции при $(1-\rho) = \gamma \ll 1$ пропорциональна γ.

На рис. 2.4 показана зависимость отношения дисперсии ошибки интерполяции в произвольной точке между двумя отсчетами (рис. 2.1) к дисперсии ошибки интерполяции в центральной точке $i = 100$ от местоположения интерполируемого значения между двумя известными отсчетами, которым соответствуют в данном случае $i = 0$ и $i = 200$. Анализ графика показывает, что с увеличением коэффициента корреляции данное отношение стремиться к единице, т.е. различие между известным отсчетом и значением, интерполируемым на его основе, уменьшается.



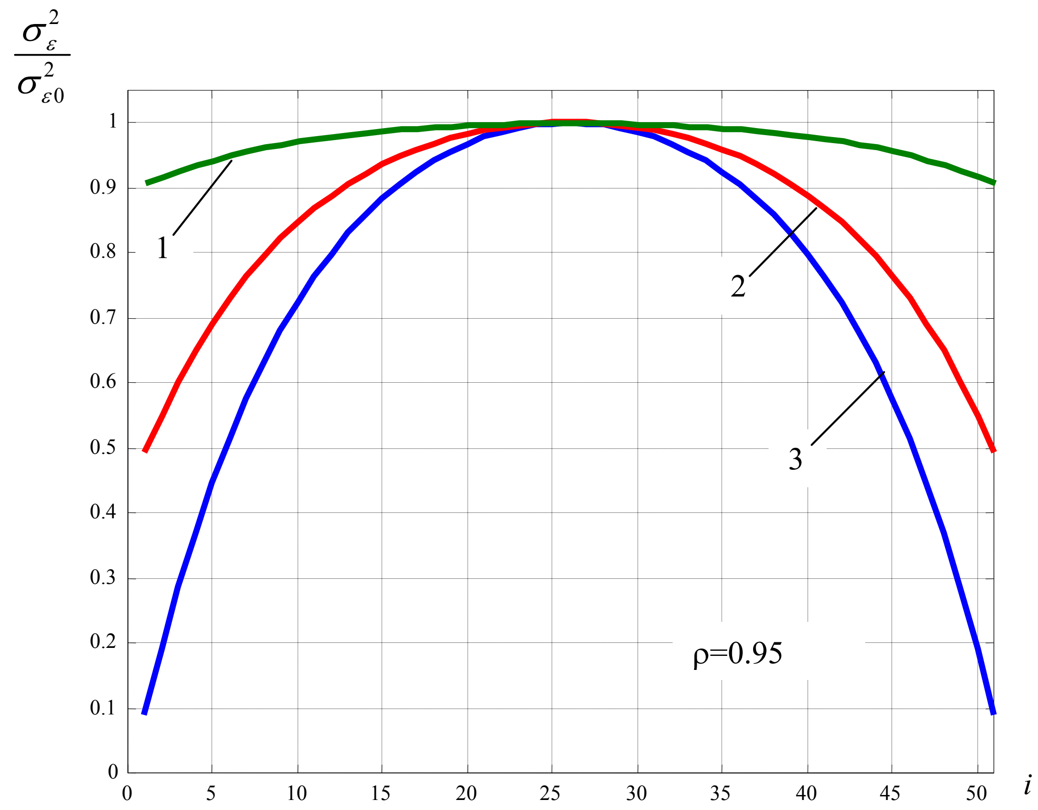
$\frac{\sigma_\varepsilon^2(i)}{\sigma_{\varepsilon 0}^2(N/2)}$
1
0.99
0.98
0.97
0.96
0.95
0.94
0.93
0.92
0.91
0.9
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200
i
ρ=0.99
ρ=0.7
ρ=0.9

Рис. 2.4.

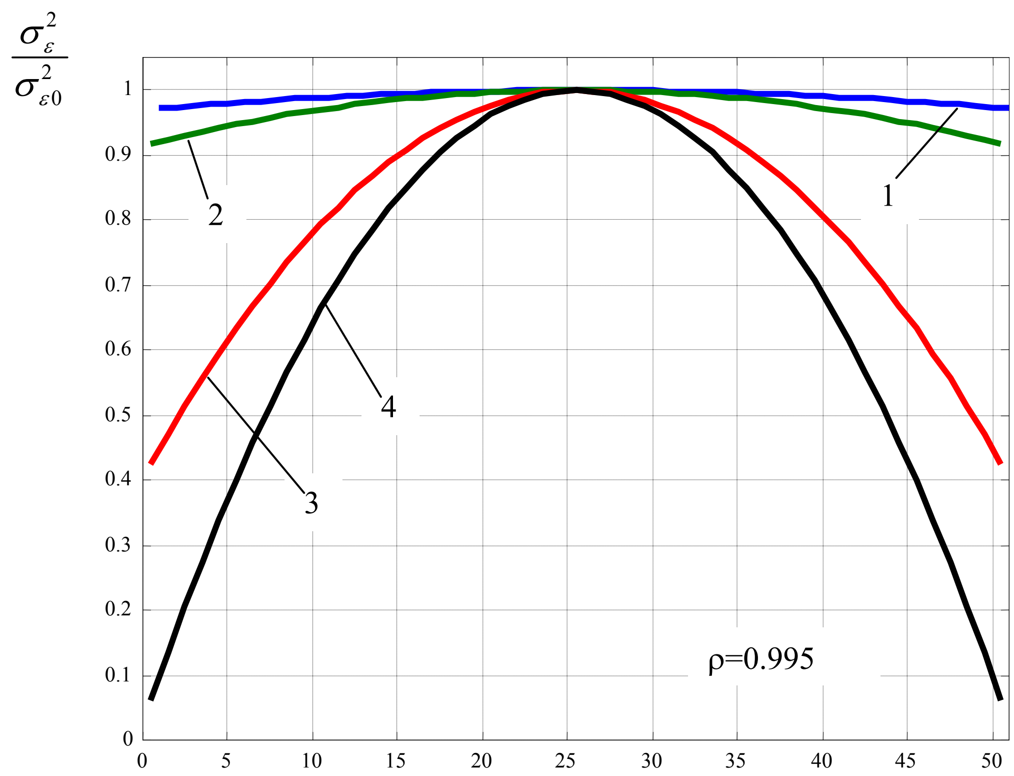


E
0.2
0.18
0.16
0.14
0.12
0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
0
0.55
0.6
0.65
0.7
0.75
0.8
0.85
0.9
0.95
1
ρ

Рис. 2.5



а) 1 - q= –10 дБ; 2 - q=0 дБ; 3 - q=10 дБ.



б) 1 - q= –4 дБ; 2 - q=0 дБ; 3 - q=10 дБ; 4 - q=20 дБ.

Рис. 2.6

На рис. 2.5 представлена кривая относительного изменения дисперсии ошибки интерполяции в центре относительно ближайших точек с наблюдениями $E = \frac{\sigma_{\varepsilon 0}^2 - \sigma_{\varepsilon}^2}{\sigma_{\varepsilon 0}^2}$ в отсутствии шумов, от коэффициента корреляции, где σ_{ε}^2 - дисперсия ошибки в точке наблюдения. Как следует из анализа этой зависимости, соответствующая разница в дисперсии ошибки интерполяции снижается с увеличением коэффициента корреляции ρ между наблюдениями. Данную кривую можно получить по формуле (2.8) при $i = N_{\Delta}/2$.

На рис. 2.6 (для сравнения с рис. 2.4) показаны зависимости отношения дисперсии ошибки оценивания к максимальной дисперсии ошибки интерполяции между двумя известными отсчетами (в центре), которым соответствуют в данном случае $i = 0$ и $i = 50$, при различных отношениях сигнал/шум q и различных коэффициентах корреляции между известными отсчетами $\left(а - \rho = 0.95,\ б - \rho = 0.995\right)$, полученные с помощью фильтра Калмана (при наличии аддитивного белого гауссовского шума наблюдений и $n = 100$). Из рис. 2.4 и 2.6 можно сделать вывод о том, что при достаточно сильных шумах $q < -10\ дБ$ ошибки в центре между отсчетами и в точках отсчетов наблюдений мало отличаются друг от друга. Кроме этого, при увеличении коэффициента корреляции ρ между отсчетами наблюдений это различие становится еще менее заметным (рис. 2.6 а, б).

2.3. Алгоритмы интерполяции случайных полей по зашумленным наблюдениям

Для получения оптимальных (в смысле минимума дисперсии ошибки) оценок $\hat{x}_{\bar{j}}$ СП $x_{\bar{j}}$ по наблюдениям $z_{\bar{j}}, \bar{j} \in \bar{J}$, используются винеровские или калмановские процедуры линейной фильтрации [1, 16, 69]. Для ряда моделей таких СП получены оценки эффективности фильтрации [15]. Вместе с тем, в известных работах практически отсутствуют результаты анализа алгоритмов интерполяции СП, т.е. получение оценок $\hat{x}_{0\bar{u}}, \bar{u} \neq \bar{j}$, , по дискретным наблюдениям $z_{\bar{j}}$ в отдельных точках СП. В работе [18] получены относительно простые формулы для максимальной дисперсии ошибки интерполяции СП в R^N по наблюдениям $z_{\bar{j}}$ в точках $\bar{j}$, находящихся в ближайших узлах N-мерной прямоугольной сетки (рис. 2.7).

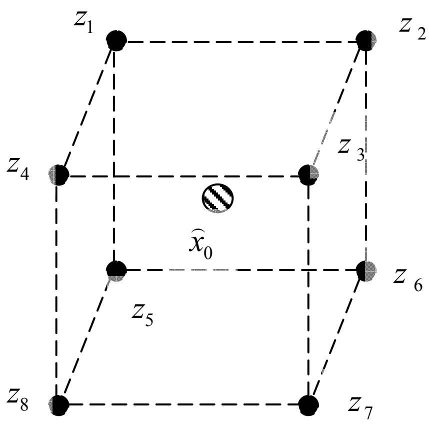


Рис. 2.7

При этом максимальная дисперсия ошибки $\sigma_\varepsilon^2 = M\left\{\left(\hat{x}_0 - x_0\right)^2\right\}$ будет соответствовать оценке $\hat{x}_0 = \hat{x}_{\bar{u}}$ в точке $\bar{u}$, находящейся в центре N-мерного параллелепипеда. При одинаковой «информативности» всех $K = 2^N$ наблюдений интерполяционная оценка оказывается наиболее простой:

$$\hat{x}_0 = \alpha_0 \sum_{i=1}^{K} z_{\bar{j}}\,, \tag{2.9}$$

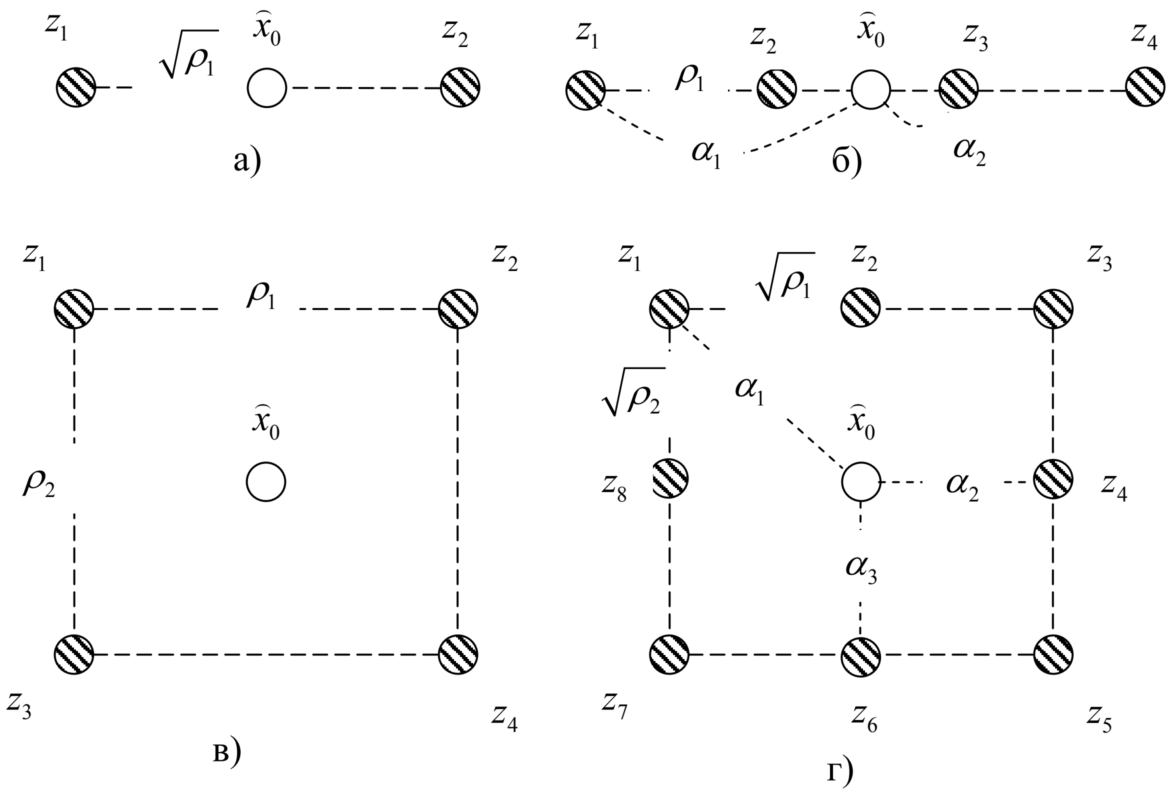


Рис. 2.8

где $\alpha_0 = \sum_{l=1}^{K} B_{xz}(l,0) \Big/ \sum_{l=1}^{K}\sum_{m=1}^{K} B_z(l,m)$ - оптимальный весовой коэффициент; $B_{xz}(l,0) = M\left\{x_0 z(j_l)\right\}$; $B_z(l,m) = M\left\{z(j_l)z(j_m)\right\}$. Можно показать, что дисперсия ошибки оптимальной интерполяции находится по формуле

$$\sigma_\varepsilon^2 = \sigma_X^2 - \alpha_0 \sum_{l=1}^{K} B_{xz}(l,0), \tag{2.10}$$

где $\sigma_X^2 = M\left\{x_0^2\right\}$. Таким образом, при заданных вероятностных характеристиках СП $z_{\overline{u}}$ и $x_{\overline{u}}$ может быть рассчитана максимальная дисперсия оптимальной линейной интерполяции.

В качестве примера рассмотрим разделимое СП $x_{\overline{u}}$ с корреляционной функцией (КФ)

$$B_x(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_N) = \sigma_X^2 \prod_{k=1}^{N} R(\tau_k), \tag{2.11}$$

где $R(\tau_k)$ - нормированная КФ по k-й координате. При этом будем полагать, что наблюдения представляют собой аддитивную смесь $z_{\bar{j}} = x_{\bar{j}} + \theta_{\bar{j}}$ информационного СП и независимых гауссовских случайных величин с нулевыми средними и дисперсиями $\sigma_\theta^2 = M\left\{\theta_{\bar{j}}^2\right\}$.

Наиболее простые выражения для дисперсии ошибки оценивания получаются в случае интерполяции в N-мерном пространстве на основе $n = 2^N$ элементов, равноотстоящих от точки x_0. Интерполяционная оценка формируется в виде линейной комбинации наблюдений z_i с одинаковыми весовыми коэффициентами α: $\hat{x}_0 = \alpha \sum_{i=1}^{N} z_i$.

Дисперсия ошибки интерполяции в центре имеет вид

$$\sigma_{\varepsilon 0}^2 = M\left\{\hat{x}_0^2\right\} - 2M\left\{\hat{x}_0 x_0\right\} + \sigma_X^2. \qquad (2.12)$$

При этом имеют место следующие соотношения:

$$M\left\{\hat{x}_0\, x_0\right\} = \sum_{i=1}^{n} \alpha M\left\{\left(x_i + \theta_i\right) x_0\right\} = 2^N \alpha \sigma_X^2 \sqrt{\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_N} \qquad (2.13)$$

$$M\left\{\hat{x}_0^2\right\} = \alpha^2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} M\left\{z_i z_j\right\} = \alpha^2 \left\{ \sum_{i=1}^{n} M\left\{z_i^2\right\} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} M\left\{z_i z_j\right\} \right\} =$$

$$= \alpha^2\, 2^N \left\{ \left(\sigma_X^2 + \sigma_\theta^2\right) + \sigma_X^2 \left[\sum_{i_1=1}^{N} \rho_{i_1} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i_1=1\\ i_2=1\\ i_1 \neq i_2}}^{N} \rho_{i_1} \rho_{i_2} + \ldots + \frac{1}{N} \sum_{\substack{i_1=1\\ i_2=1\\ \ldots\\ i_N=1\\ i_1 \neq i_2 \neq \ldots \neq i_N}}^{N} \rho_{i_1} \rho_{i_2} \ldots \rho_{i_N} \right] \right\} =$$

$$= \alpha^2\, 2^N \left\{ \left(\sigma_X^2 + \sigma_\theta^2\right) + \sigma_X^2 \left[\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \left(\sum_{\substack{i_1=1\\ i_2=1\\ \ldots\\ i_N=1\\ i_1 \neq i_2 \neq \ldots \neq i_N}}^{N} \rho_{i_1} \rho_{i_2} \ldots \rho_{i_N} \right) \right] \right\}. \qquad (2.14)$$

Вычислив производную $d\sigma_\varepsilon^2 / d\alpha = 0$, получим оптимальное значение весового коэффициента

$$\alpha = \frac{\sqrt{\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_N}}{f(\rho)}. \quad (2.15)$$

С учетом выражений (2.13)-(2.15) формула (2.12) преобразуется к виду

$$\sigma_{\varepsilon 0}^2 = \sigma_X^2 \left[1 - \frac{2^N \rho_1 \rho_2 \ldots \rho_N}{f(\rho)} \right], \quad (2.16)$$

где $f(\rho) = 1 + \frac{1}{q} + \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{k} \sum_{\substack{i_1=1 \\ i_2=1 \\ \ldots\ldots \\ i_k=1 \\ i_1 \neq i_2 \neq .. \neq i_k}}^{N} \rho_{i_1} \rho_{i_2} \ldots \rho_{i_k} \right)$, $q = \frac{\sigma_X^2}{\sigma_\theta^2}$ - отношение сигнал/шум.

В частности, при оценивании по двум наблюдениям ($N = 1$)

$$\alpha = \frac{\sqrt{\rho_1} q}{q(1 + \rho_1) + 1}, \qquad \sigma_{\varepsilon 0}^2 = \sigma_X^2 \left[1 - 2\alpha \sqrt{\rho_1} \right];$$

при оценивании по четырем наблюдениям («в центре квадрата»)

($N = 2$) $\alpha = \dfrac{\sqrt{\rho_1 \rho_2}}{1 + \frac{1}{q} + \rho_1 + \rho_2 + \rho_1 \rho_2}$, $\quad \sigma_{\varepsilon 0}^2 = \sigma_X^2 \left[1 - 4\alpha \sqrt{\rho_1 \rho_2} \right];$

при оценивании по восьми наблюдениям ($N = 3$) («в центре куба», рис. 2.7)

$$\alpha = \frac{\sqrt{\rho_1 \rho_2 \rho_3}}{1 + \frac{1}{q} + \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \rho_1 \rho_2 + \rho_2 \rho_3 + \rho_1 \rho_3 + \rho_1 \rho_2 \rho_3},$$

$$\sigma_{\varepsilon 0}^2 = \sigma_X^2 \left[1 - 8\alpha \sqrt{\rho_1 \rho_2 \rho_3} \right],$$

где $q = \sigma_X^2 / \sigma_\theta^2$ - отношение сигнал/шум, ρ_1, ρ_2, ρ_3 - коэффициенты корреляции между элементами СП $x_{\bar{j}}$ вдоль соответствующих координатных осей.

На практике зачастую возникает необходимость заранее определить целесообразность восстановления СП по отдельным отсчетам наблюдений. Для достижения этой цели требуется оценить ошибки интерполяции для наихудшего случая – в центральной точке между узлами с наблюдениями и сравнить их с ошибками оценивания СП в узлах.

На рис. 2.9 показаны зависимости разности дисперсии ошибки интерполяции для крайнего (в узле) и центрального (в центре между двумя соседними узлами) отсчетов последовательности при различных ОСШ

$$D = \frac{\sigma_{\varepsilon 0}^2 - \sigma_{\varepsilon}^2}{\sigma_{\varepsilon 0}^2} \bullet (100\ \%),$$

где σ_{ε}^2 - дисперсия ошибки оценивания в узле; $\sigma_{\varepsilon 0}^2$ - дисперсия ошибки интерполяции в центре между соседними узлами. Данные зависимости позволяют сделать вывод о том, что с увеличением ОСШ растет разница в дисперсии ошибки интерполяции на краях (узлах или, что то же самое, местах расположения пилот-сигналов) и в центре. Сравнив рис. 2.9 с рис. 2.5 можно убедиться, что наибольшая разность дисперсии ошибки интерполяции достигается при отсутствии шума.

На рис. 2.10 показаны зависимости отношения сигнал/шум от коэффициента корреляции ρ при заданном граничном условии $\sigma_{\varepsilon}^2 / \sigma_X^2 < 0.1$ для различных размерностей случайного поля, выраженных количеством точек наблюдений (узлов) (M =2, 4, 8 соответствуют одно-, двух- и трехмерному полю), равноотстоящих от точки, в которой делается прогноз (σ_{ε}^2 - дисперсия ошибки оценивания в точке наблюдения). Это позволяет сделать вывод о том, что оценку целесообразно производить при достаточно сильно коррелированных сигналах $\rho > 0.9$ и слабых шумах $q > 10\ дБ$, причем граничный коэффициент корреляции возрастает с увеличением размерности случайного поля.

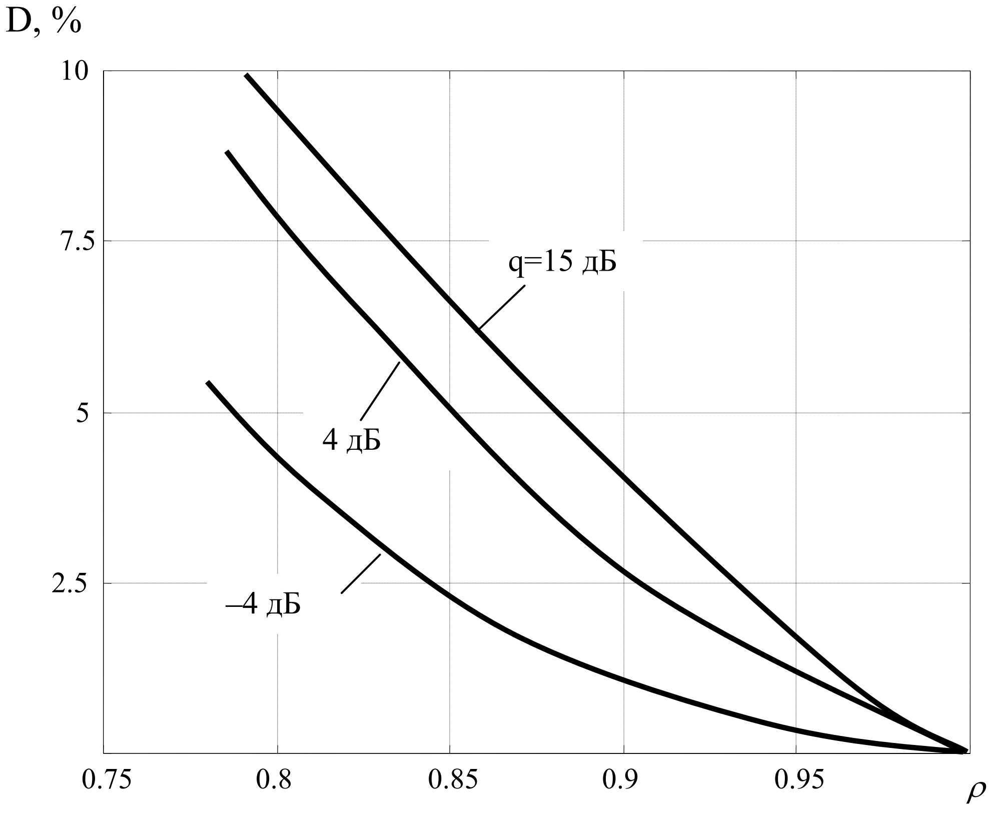


Рис. 2.9

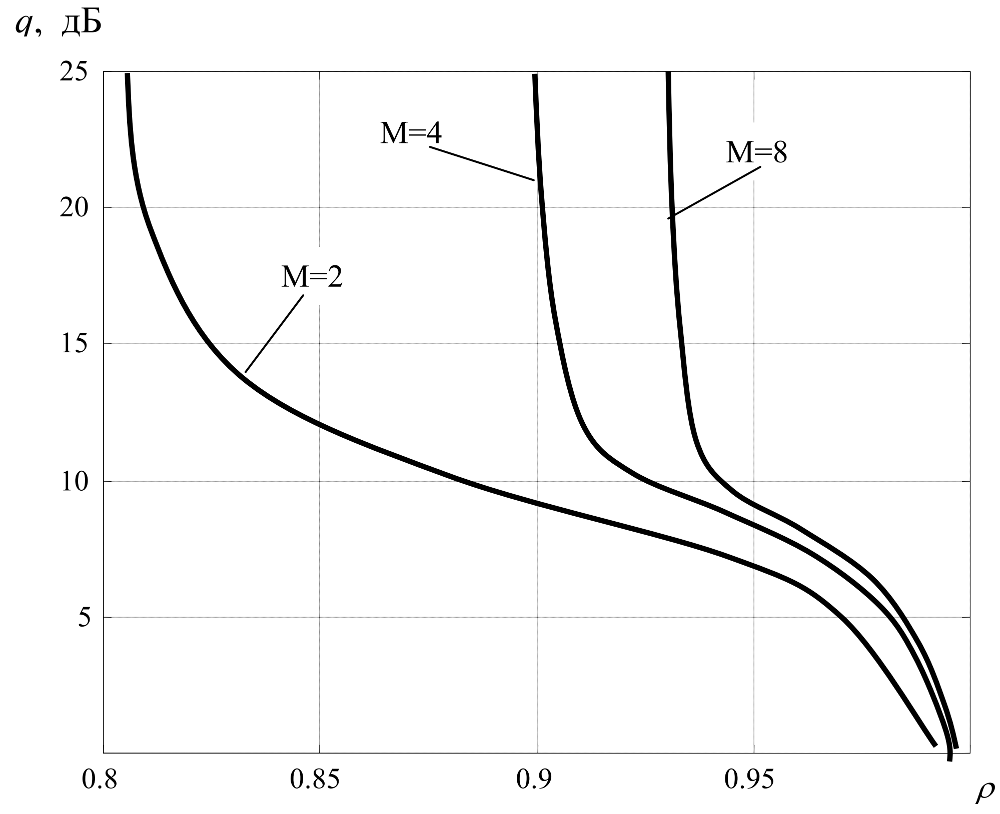


Рис. 2.10

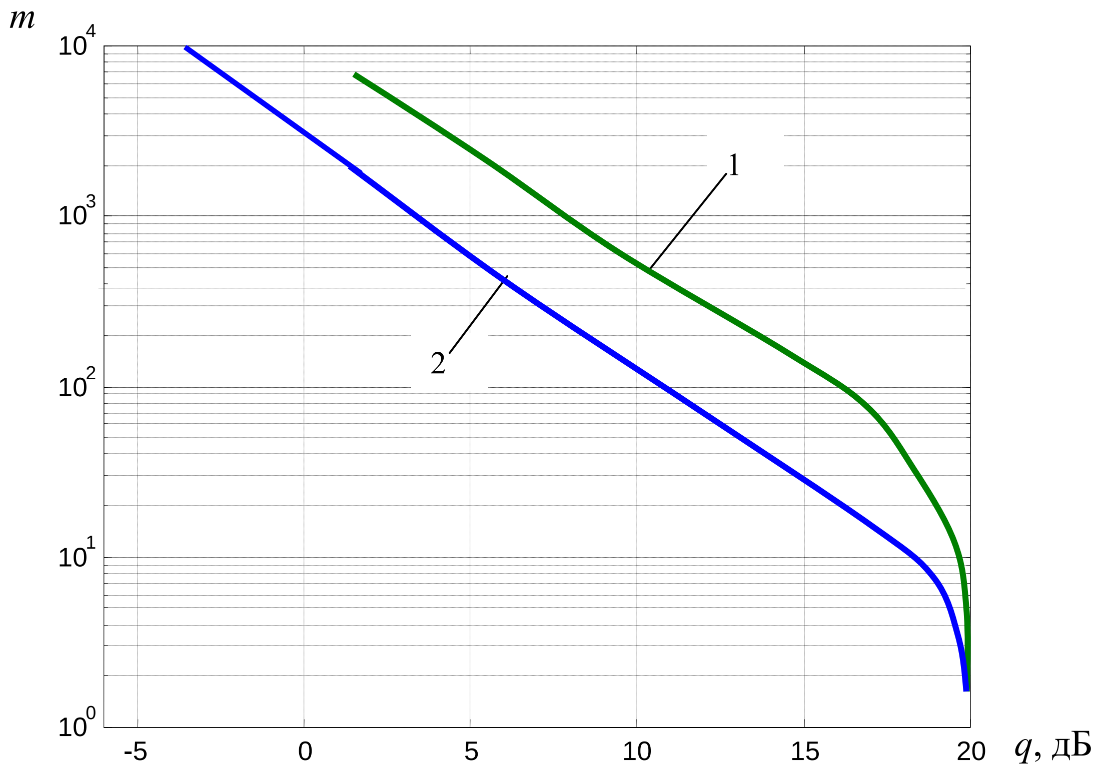


Рис. 2.11

Данные кривые ограничивают области значений (ρ, q) (над кривыми) при которых ещё имеет смысл производить интерполяцию в центре на основе имеющихся M наблюдений.

На рис. 2.11 показаны зависимости интервала корреляции $m = 1/(1-\rho)$ между соседними отсчетами наблюдений от отношения сигнал/шум q при котором выполняется условие $\sigma_{\varepsilon 0}^2 / \sigma_X^2 < 0.01$ для последовательности отсчетов (кривая 1) и для случайного поля отсчетов (кривая 2). В данном случае дисперсия ошибки интерполяции $\sigma_{\varepsilon 0}^2$ в центре между наблюдениями z_i вычислена с помощью оптимального линейного фильтра, т.е. является предельно достижимой величиной.

Полученные результаты позволяют по заданной допустимой дисперсии ошибки определить необходимые корреляционные расстояния между наблюдениями, требуемыми для восстановления непрерывного информационного СП [19, 74, 75].

Существенный интерес представляет анализ влияния количества наблюдений, используемых при интерполяции, на точность интерполяции, поскольку при малых размерностях СП $N = 1\ldots 3$ учет дополнительных наблюдений незначительно увеличивает вычислительные затраты.

Нетрудно показать, что дисперсия ошибки оптимальной интерполяции для одно- и двумерного СП по нескольким соседним отсчетам оценок $z_{\bar{j}}$ находится по формулам [19]

$$\sigma_{\varepsilon 0}^2 = M\left\{\left[\alpha\left(z_1 + z_2\right) - x_0\right]^2\right\} \text{ (последовательность рис.2.8, а),}$$

$$\sigma_{\varepsilon 0}^2 = M\left\{\left[\alpha_1\left(z_1 + z_4\right) + \alpha_2\left(z_2 + z_3\right) - x_0\right]^2\right\} \text{ (последовательность рис.2.8, б),}$$

$$(2.17)$$

$$\sigma_{\varepsilon 0}^2 = M\left\{\left[\alpha\left(z_1 + z_2 + z_3 + z_4\right) - x_0\right]^2\right\} \text{ (поле рис.2.8, в),}$$

$$\sigma_{\varepsilon 0}^2 = M\left\{\left[\alpha_1\left(z_1 + z_3 + z_5 + z_7\right) + \alpha_2\left(z_4 + z_8\right) + \alpha_3\left(z_2 + z_6\right) - x_0\right]^2\right\} \text{(поле рис.2.8, г),}$$

где коэффициенты $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ вычисляются из условия минимума дисперсии ошибки интерполяции (см. Приложение 2).

2.4. Алгоритмы интерполяции случайных полей по оптимальным оценкам

В предыдущем разделе был проведен анализ погрешностей интерполяции по дискретным отсчетам зашумленных наблюдений $z_{\bar{j}}$. Наряду с этим существенный интерес представляет анализ погрешностей интерполяции по дискретным отсчетам оптимальных линейных оценок $\hat{x}_{\bar{j}}$, полученных для СП бесконечных размеров, т.е. глобально оптимальных оценок. Очевидно, при этом возрастет точность интерполяции, однако в результате этого возникнут дополнительные вычислительные затраты, необходимые для получения оптимальных оценок.

Анализ показывает, что в известных работах отсутствуют результаты сравнительного анализа точности алгоритмов интерполяции СП по дискретным наблюдениям $z_{\bar{j}}$ и по оптимальным оценкам $\hat{x}_{\bar{j}}$ в отдельных точках СП при различном количестве наблюдений или оценок, находящихся в окрестности интерполируемого отсчета (рис. 2.12).

В работе [19] получены зависимости для максимальной дисперсии ошибки интерполяции СП по дискретным наблюдениям $z_{\bar{j}}$ и по оптимальным оценкам $\hat{x}_{\bar{j}}$ находящимся в ближайших узлах одно- и двумерной прямоугольной сетки. При этом максимальная дисперсия ошибки интерполяции $\sigma^2_{\varepsilon 0} = M\left\{\left(\hat{x}_0 - x_0\right)^2\right\}$ соответствует оценке $\hat{x}_0 = \hat{x}_{\bar{u}}$ в точке $\bar{u}$, находящейся в центре N-мерного параллелепипеда (рис. 2.7).

Интерполяционную оценку $\hat{x}_0 = f\left\{\hat{x}_{\bar{j}},\ \ \bar{j} \in \bar{J}\right\}$ в N-мерном непрерывном пространстве $R^N = \left\{\bar{u} = \left(u_1, u_2, \ldots, u_N\right) : \left\{-\infty < u_k < \infty\right\}, k = \overline{1 \ldots N}\right\}$, соответствующем N-мерной прямоугольной сетке $\bar{J}$, можно сформировать в виде линейной комбинации оптимальных линейных оценок $\hat{x}_{\bar{j}}$ с соответствующими весовыми коэффициентами $\beta_{\bar{j}}$:

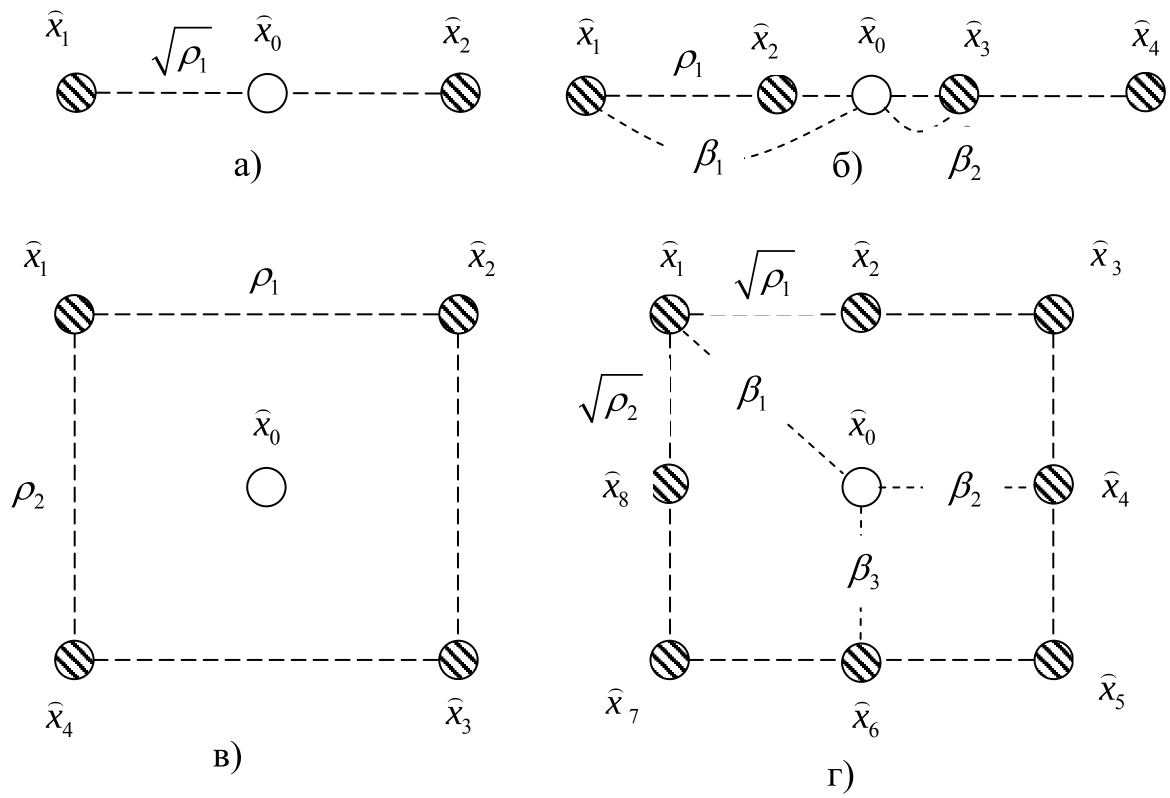


Рис. 2.12

$$\widehat{x}_0 = \sum_{j_1=1}^{M_1} \sum_{j_2}^{M_2} \ldots \sum_{j_N}^{M_N} \beta_{\bar{j}} \widehat{x}_{\bar{j}} \; . \tag{2.18}$$

При одинаковой «информативности» всех оценок (рис. 2.12 а, в) соответствующие интерполяционные оценки имеют вид:

$$\widehat{x}_0 = \beta_0 \sum_{i=1}^{N} \widehat{x}_i \; , \tag{2.19}$$

где β_0 - оптимальный весовой коэффициент, вычисляемый из условия минимума дисперсии ошибки интерполяции. Дисперсия ошибки интерполяции

$$\sigma_{\varepsilon 0}^2 = M\left\{\left(\widehat{x}_0 - x_0\right)^2\right\} = M\left\{\widehat{x}_0^2 - 2\widehat{x}_0 x_0 + x_0^2\right\}, \tag{2.20}$$

$$M\left\{x_0\, \widehat{x}_0\right\} = \beta_0 \sum_{i=1}^{N} M\left\{x_0\, \widehat{x}_i\right\} \;,\; M\left\{x_0^2\right\} = \sigma_X^2 \; .$$

При вычислении математических ожиданий $M\left\{\widehat{x}_i^2\right\}$ и $M\left\{\widehat{x}_i\,\widehat{x}_j\right\}$ воспользуемся леммой об ортогональности наблюдений $z_{\bar{j}}$ и ошибок оценивания $\varepsilon_{\bar{j}}$, т.е. $M\left\{\overline{z}_i\,\varepsilon_i\right\}=0$ [45, 69, 83].

При этом средний квадрат оценки равен

$$M\left\{\widehat{x}_i^2\right\}=M\left\{\left(x_i-\varepsilon_i\right)^2\right\}=M\left\{x_i^2-2x_i\varepsilon_i+\varepsilon_i^2\right\}=M\left\{x_i^2\right\}-2M\left\{x_i\varepsilon_i\right\}+M\left\{\varepsilon_i^2\right\}$$

с учетом того, что

$$\varepsilon_i=x_i-\widehat{x}_i=x_i-\mathbf{H}_{opt}\overline{z}_i, \tag{2.21}$$

где $\mathbf{H}_{opt}$ - передаточная функция оптимального фильтра Винера [1, 45], вычисляемая как $\mathbf{H}_{opt}=\mathbf{R}_{ZZ}^{-1}\mathbf{R}_{XZ}$, где $\mathbf{R}_{ZZ}$ - автокорреляционная матрица входных наблюдений z_i, $\mathbf{R}_{XZ}$ - матрица взаимных корреляций между наблюдениями z_i и полезным сигналом x_i.

Учитывая, что средний квадрат ошибки оценивания $M\left\{\varepsilon_i^2\right\}=M\left\{\varepsilon_i\left(x_i-\overline{H}_{opt}\overline{z}_i\right)\right\}=M\left\{\varepsilon_i x_i\right\}$ и $M\left\{\overline{z}_i\,\varepsilon_i\right\}=0$,

имеем для среднего квадрата оптимальной оценки $M\left\{\widehat{x}_i^2\right\}=M\left\{x_i^2\right\}-M\left\{\varepsilon_i^2\right\}$.

Аналогично, в общем случае ковариация оценок равна

$$M\left\{\widehat{x}_i\widehat{x}_j\right\}=M\left\{\left(x_i-\varepsilon_i\right)\left(x_j-\varepsilon_j\right)\right\}=M\left\{x_ix_j\right\}-M\left\{x_j\varepsilon_i\right\}-M\left\{x_i\varepsilon_j\right\}+M\left\{\varepsilon_i\varepsilon_j\right\} \tag{2.22}$$

и с учетом того, что ковариация ошибок оценивания

$$M\left\{\varepsilon_i\varepsilon_j\right\}=M\left\{\varepsilon_i\left(x_j-\overline{H}_{opt}\overline{z}_j\right)\right\}=M\left\{\varepsilon_i x_j\right\} \tag{2.23}$$

и $M\left\{\overline{z}_j\,\varepsilon_i\right\}=0$, имеем для ковариации оптимальных оценок

$$M\left\{\widehat{x}_i\,\widehat{x}_j\right\}=M\left\{x_i\,x_j\right\}-M\left\{\varepsilon_i\,\varepsilon_j\right\}. \tag{2.24}$$

Ковариации ошибок оценивания $M\left\{\varepsilon_i\,\varepsilon_j\right\}$ могут быть найдены с помощью теории фильтра Винера [1, 69], для чего необходимо сделать ряд интегральных преобразований (приложение 1).

Метод интерполяции на основе оптимальных оценок, описанный в настоящем разделе, можно интерпретировать как алгоритм интерполяции, состоящий из двух этапов:

1) фильтрация СП дискретных наблюдений с целью получения оптимальных оценок;

2) собственно интерполяция значений в промежуточных отсчетах дискретной сетки, находящихся между известными наблюдениями.

Нетрудно показать, что дисперсия ошибки оптимальной интерполяции для одно- и двумерного СП по нескольким соседним отсчетам оценок $\hat{x}_{\bar{j}}$ находится по формулам [19, 75]

$$\sigma_{\varepsilon 0}^2 = M\left\{\left[\beta\left(\hat{x}_1 + \hat{x}_2\right) - x_0\right]^2\right\} \text{ (последовательность рис.2.12, а),}$$

$$\sigma_{\varepsilon 0}^2 = M\left\{\left[\beta_1\left(\hat{x}_1 + \hat{x}_4\right) + \beta_2\left(\hat{x}_2 + \hat{x}_3\right) - x_0\right]^2\right\} \text{ (последовательность рис.2.12, б),}$$

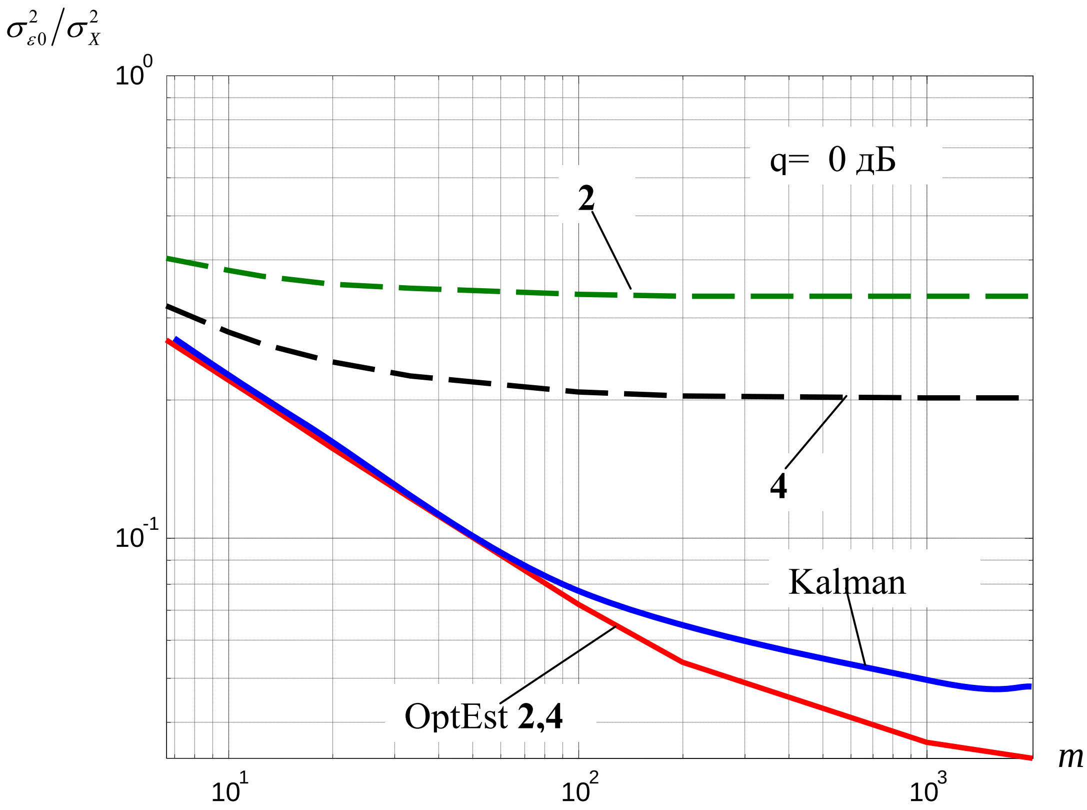
$$(2.25)$$

$$\sigma_{\varepsilon 0}^2 = M\left\{\left[\beta\left(\hat{x}_1 + \hat{x}_2 + \hat{x}_3 + \hat{x}_4\right) - x_0\right]^2\right\} \text{ (поле рис.2.12, в),}$$

$$\sigma_{\varepsilon 0}^2 = M\left\{\left[\beta_1\left(\hat{x}_1 + \hat{x}_3 + \hat{x}_5 + \hat{x}_7\right) + \beta_2\left(\hat{x}_4 + \hat{x}_8\right) + \beta_3\left(\hat{x}_2 + \hat{x}_6\right) - x_0\right]^2\right\} \text{(поле рис.2.12, г),}$$

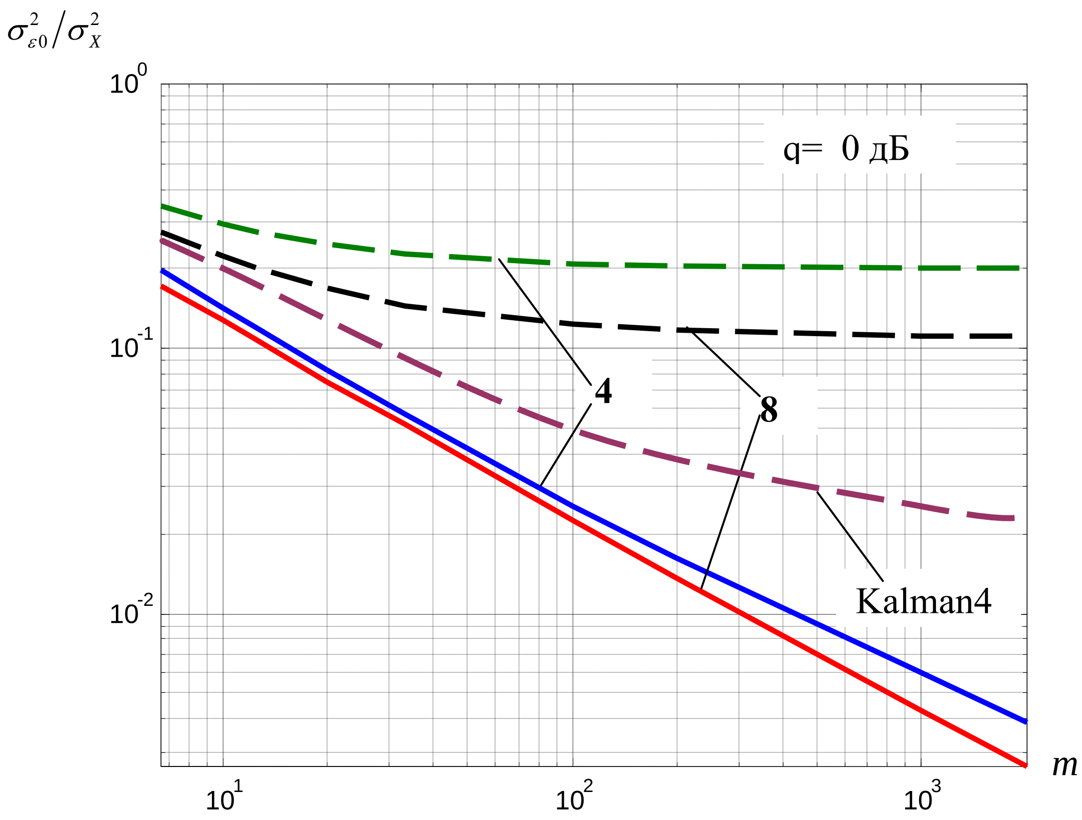
где коэффициенты β_i вычисляются из условия минимума дисперсии ошибки интерполяции $d\sigma_{\varepsilon 0}^2 / d\bar{\beta} = 0$ (см. Приложение 2).

На рис. 2.13–2.15 (а – последовательность, б – двумерное поле) показаны сравнительные графические зависимости относительной дисперсии ошибки интерполяции $\sigma_{\varepsilon 0}^2 / \sigma_X^2$ по зашумленным наблюдениям $z_{\bar{j}}$ (пунктирная линия) и по оценкам $\hat{x}_{\bar{j}}$ (сплошная линия) для одно- и двумерного случаев, соответственно в зависимости от интервала корреляции $m = 1/(1-\rho)$ случайного поля при отношениях сигнал-шум 0, 10 и 20 дБ.



$\sigma^2_{\varepsilon 0}/\sigma^2_X$
10^0
10^{-1}
q= 0 дБ
2
4
Kalman
OptEst 2,4
10^1
10^2
10^3
m

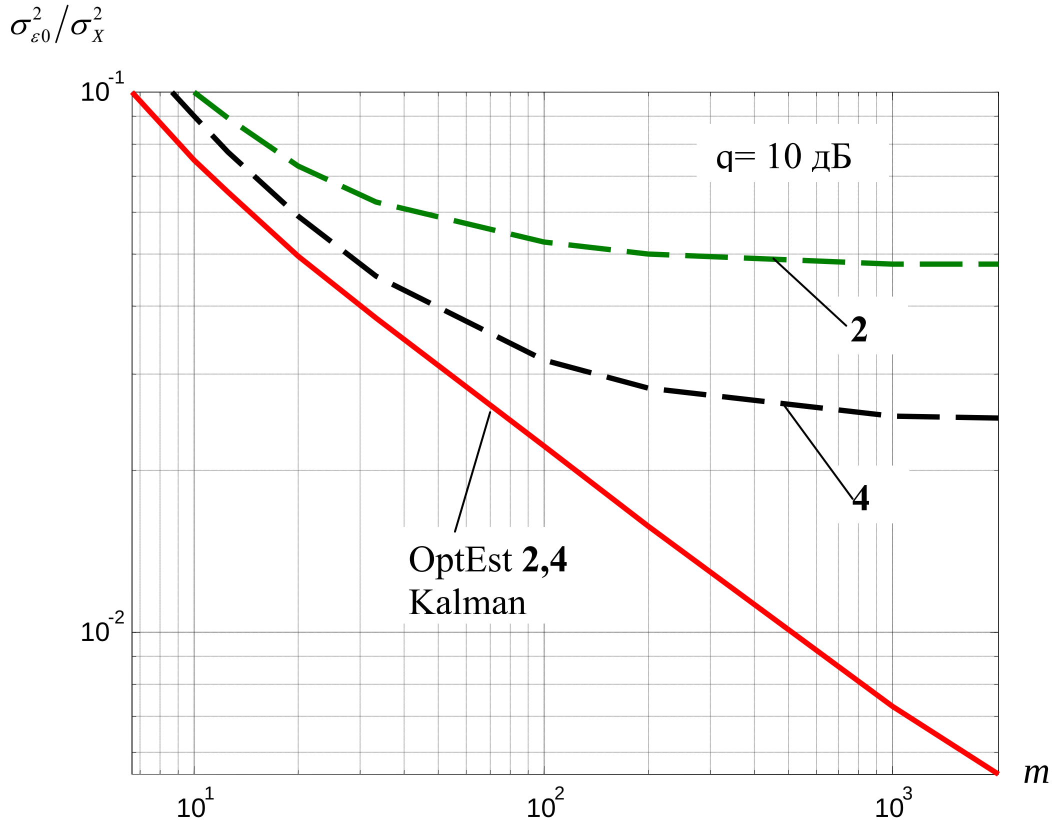
а)



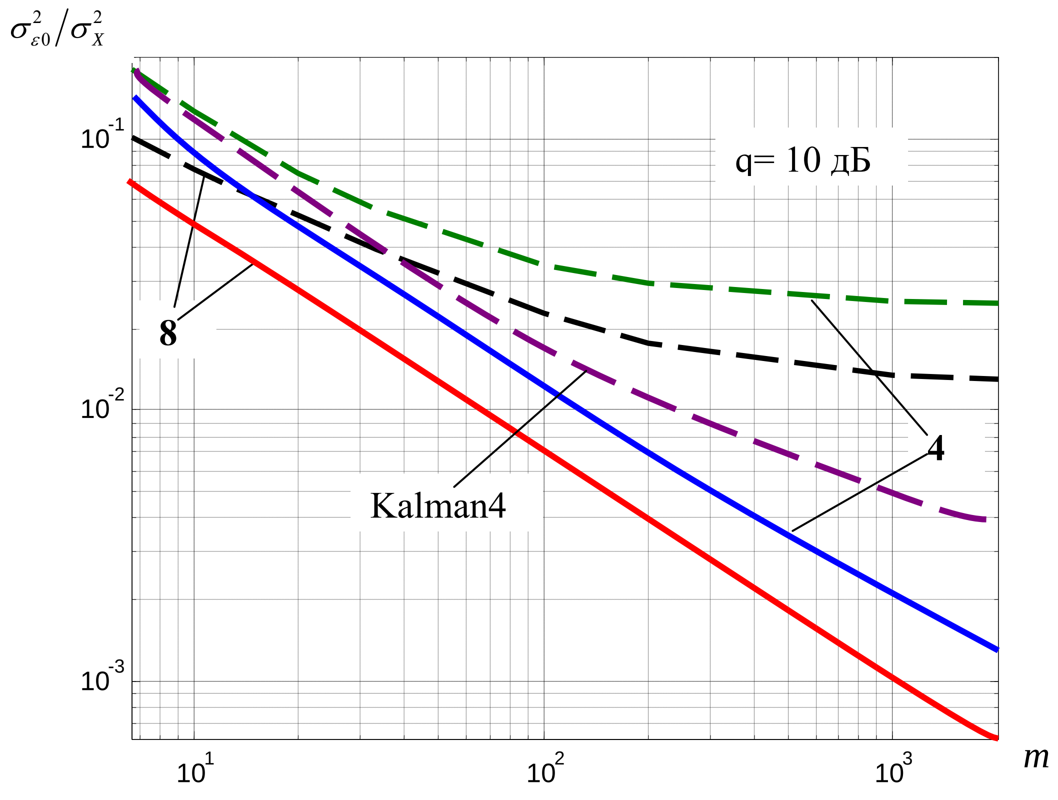
$\sigma^2_{\varepsilon 0}/\sigma^2_X$
10^0
10^{-1}
10^{-2}
q= 0 дБ
4
8
Kalman4
10^1
10^2
10^3
m

б)

Рис. 2.13

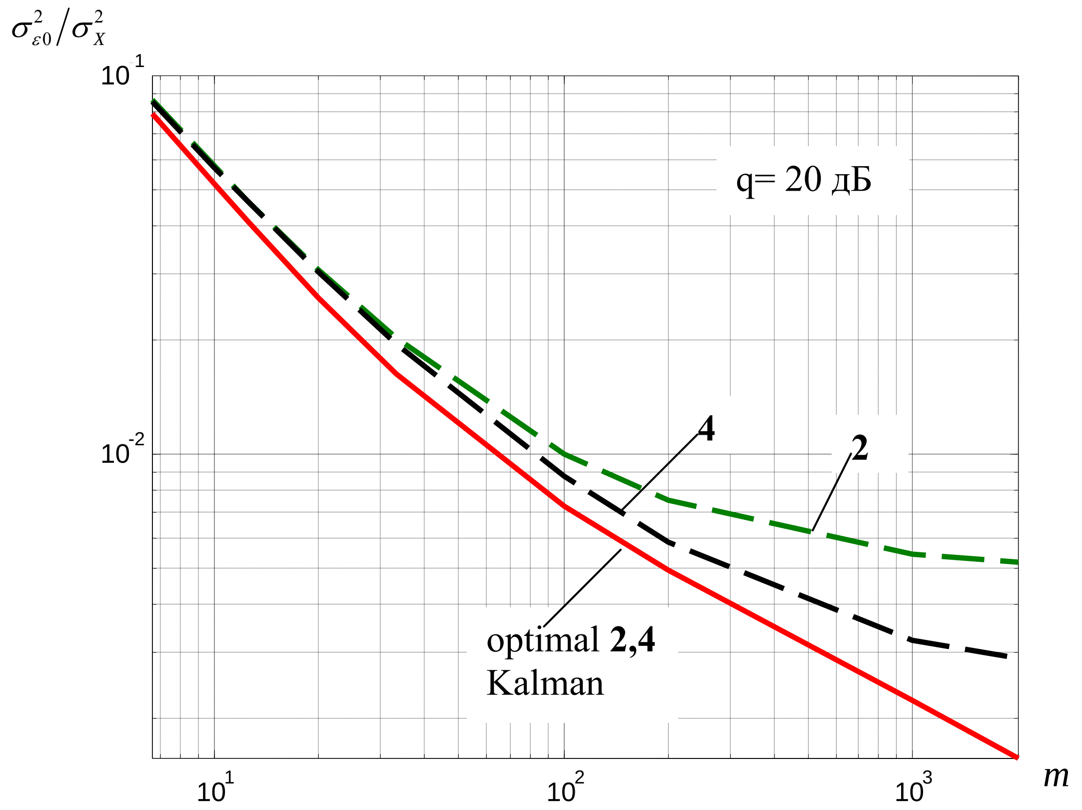

$\sigma^2_{\varepsilon 0}/\sigma^2_X$
10^{-1}
10^{-2}
q= 10 дБ
2
4
OptEst 2,4
Kalman
10^1
10^2
10^3
m

а)


$\sigma^2_{\varepsilon 0}/\sigma^2_X$
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
q= 10 дБ
8
4
Kalman4
10^1
10^2
10^3
m

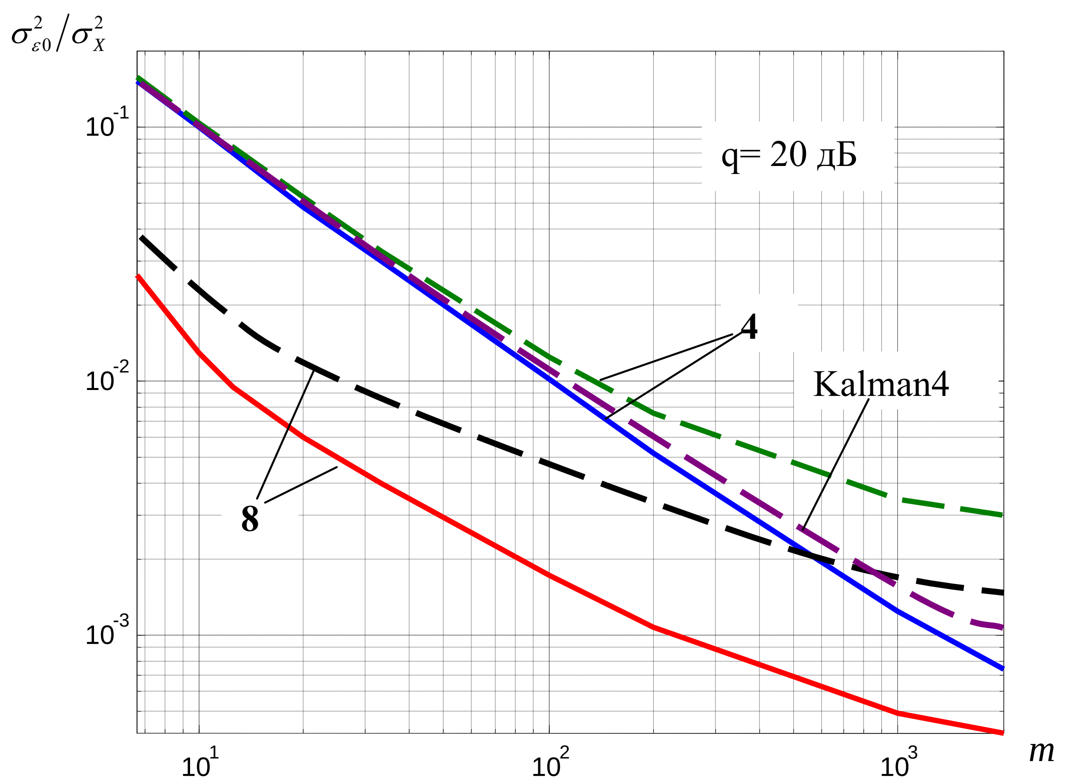
б)

Рис. 2.14



$\sigma_{\varepsilon 0}^2/\sigma_X^2$
10^{-1}
10^{-2}
q= 20 дБ
4
2
optimal 2,4
Kalman
10^1
10^2
10^3
m

а)



$\sigma_{\varepsilon 0}^2/\sigma_X^2$
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
q= 20 дБ
4
Kalman4
8
10^1
10^2
10^3
m

б)

Рис. 2.15

При этом цифрами (2, 4, 8) на графиках показано число наблюдений (оценок), на основе которых осуществлялась интерполяция. На графиках показано, что с уменьшением ОСШ различие между дисперсиями ошибки интерполяции при оценивании по наблюдениям и по оптимальным оценкам возрастает, причем тем в большей степени, чем выше коэффициент корреляции. Кроме этого, для последовательности отсчетов СП при интерполяции по оптимальным оценкам дисперсия ошибки практически не зависит от количества отсчетов, на основе которых выполняется интерполяция (рис. 2.13-2.15, а), в то время как в аналогичном случае двумерных СП зависимость дисперсия ошибки от количества отсчетов более заметна (рис. 2.13-2.15, б). На рис. 2.13 (а) отдельно показана кривая, соответствующая интерполяции с помощью фильтра Калмана при количестве отсчетов используемых для интерполяции равном 100. В остальных случаях (рис. 2.14-2.15, а) аналогичная кривая практически совпадает с кривыми для интерполяции по оптимальным оценкам (различие составляет около 0.1%).

Для анализа вычислительных затрат рассмотрим СП размером $n \times n$ элементов, описываемое разделимой экспоненциальной КФ (1.11). При оптимальной винеровской фильтрации на 1 отсчет поля будет приходиться $O\left(n^2\right)$ вычислительных операций (умножений) [21], а при рекуррентной калмановской фильтрации $O\left(4n\right)$ операций. В то же время предлагаемый метод позволяет существенно снизить удельные вычислительные затраты (количество операций на 1 отсчет) при непосредственной интерполяции, которые не зависят от размеров СП, что показано в табл. 2.1, 2.2. Однако, при этом добавляются вычислительные затраты, необходимые для получения оптимальных оценок и составляющие $O\left(4n\right)$ операций на один отсчет СП.

В табл. 2.1 показано количество умножений при обработке случайной последовательности из n отсчетов.

Таблица 2.1

	По наблюдениям $z_{\bar{j}}$	По оценкам $\hat{x}_{\bar{j}}$
На основе 2 отсчетов (рис. 2.12, а)	n	$15n$
На основе 4 отсчетов (рис. 2.12, б)	$2n$	$16n$
Оптимальный фильтр Винера	n^2	–
Оптимальный фильтр Калмана	$14n$	–

В табл. 2.2 показано количество умножений при обработке двумерного СП размера $n \times n$ отсчетов.

Таблица 2.2

	По наблюдениям $z_{\bar{j}}$	По оценкам $\hat{x}_{\bar{j}}$
На основе 4 отсчетов (рис. 2.12, в)	n^2	$4n^3 + n^2$
На основе 8 отсчетов (рис. 2.12, г)	$3n^2$	$4n^3 + 3n^2$
Оптимальный фильтр Винера	n^4	–
Оптимальный фильтр Калмана	$4n^3$	–

Таким образом, исходя из графических зависимостей (рис. 2.13-2.15), можно сделать вывод, что при оптимальной линейной интерполяции по оценкам $\hat{x}_{\bar{j}}$ достигается существенный выигрыш по дисперсии ошибки по сравнению с оптимальной интерполяцией по зашумленным наблюдениям $z_{\bar{j}}$, который возрастает с увеличением коэффициента корреляции СП. Кроме этого, при увеличении количества наблюдений (оценок) в окрестности интерполируемого отсчета x_0 (рис. 2.12 б, г) данный выигрыш увеличивается. Основное преимущество предлагаемого алгоритма заключается в повышении точности интерполяции по сравнению с точностью, получаемой при калмановской фильтрации СП зашумленных наблюдений при практически одинаковых вычислительных затратах (табл. 2.1, 2.2).

2.5. Выводы

1. Впервые проведен сравнительный анализ алгоритмов интерполяции СП, на основе зашумленных наблюдений $z_{\bar{j}}$ и на основе оптимальных оценок $\hat{x}_{\bar{j}}$. Полученные аналитические результаты позволяют дать оценки относительной дисперсии ошибки интерполяции $\sigma^2_{\varepsilon 0}/\sigma^2_X$ при различных параметрах СП, заданных многомерной моделью авторегрессии с разделимой КФ.

2. Впервые разработан алгоритм интерполяции СП на основе оптимальных оценок, полученных с помощью фильтра Калмана. Данный алгоритм требует примерно столько же умножений, как и оптимальный алгоритм интерполяции СП на основе зашумленных наблюдений (табл. 2.1, 2.2), реализованный на основе фильтра Калмана. Показано, что при интерполяции на основе оптимальных оценок удается достичь существенного снижения дисперсии ошибки интерполяции (особенно при малых ОСШ и высоких корреляциях) порядка 10-30 % - для одномерного СП (последовательности) и в 2-3 раза – для двумерного СП по сравнению с алгоритмом интерполяции с помощью фильтра Калмана по зашумленным наблюдениям для СП размеров 100х100 элементов.

3. Показано, что при интерполяции СП на основе оптимальных оценок удается достичь значительного снижения погрешностей интерполяции по сравнению с глобально оптимальными алгоритмами на основе зашумленных наблюдений при незначительном увеличении вычислительных затрат (табл. 2.1, 2.2). В то же самое время в ряде случаев (при больших ОСШ $q > 20\ дБ$, малых корреляциях $\rho < 0.9$ и жестких ограничениях на вычислительные ресурсы) было бы целесообразнее использовать интерполяционные оценки на основе зашумленных наблюдений.

4. Впервые получены выражения для дисперсии ошибки интерполяции в N-мерном пространстве на основе $n = 2^N$ элементов, равноотстоящих от точки x_0. Проанализированы зависимости ОСШ от коэффициента корреляции ρ при заданном граничном условии $\sigma^2_{\varepsilon}/\sigma^2_X < 0.1$ для СП различных размерностей

(σ_{ε}^{2} - дисперсия ошибки оценивания в точке наблюдения), что позволяет сделать вывод о том, что оценку целесообразно производить при достаточно сильно коррелированных сигналах $\rho > 0.9$ и слабых шумах $q > 10$ $\partial Б$.

5. Получены зависимости интервала корреляции $m = 1/(1-\rho)$ между соседними отсчетами наблюдений от ОСШ q при которых выполняется условие $\sigma_{\varepsilon 0}^{2}/\sigma_{X}^{2} < 0.01$ для одно- и двумерного СП ($\sigma_{\varepsilon 0}^{2}$ - дисперсия ошибки интерполяции в центре между узлами с наблюдениями). Показано, что с увеличением коэффициента корреляции ρ, предельно допустимое ОСШ снижается, что позволяет по заданной допустимой дисперсии ошибки определить необходимые корреляционные расстояния между наблюдениями, требуемыми для восстановления непрерывного информационного СП с заданным ОСШ.

ГЛАВА 3. АЛГОРИТМЫ РАЗМЕЩЕНИЯ ПИЛОТ-СИГНАЛОВ НА МНОГОМЕРНЫХ СЕТКАХ

3.1. Постановка задачи

Многие современные системы извлечения информации представляют собой пространственные апертуры датчиков и имеют ограниченные размеры. При этом датчики можно интерпретировать как источники опорной информации, на основе которой производится восстановление значений СП в узлах, где отсутствуют датчики [21]. Аналогичная задача возникает при синтезе устройств оценивания текущего состояния канала с быстрыми замираниями в многочастотных системах связи. При этом канал связи можно интерпретировать в виде двумерной сетки «время-частота», на которой некоторым образом распределены т.н. пилот-сигналы, играющие роль датчиков и несущие в себе опорную информацию об амплитудно-фазовых искажениях полезного сигнала в канале [34, 42, 119]. Поскольку восстановление СП по неполным измерениям производится при ограничении на число измерителей (датчиков), а сам характер их расположения заранее не фиксирован, естественным образом возникает задача оптимального размещения измерителей. В настоящей работе будем считать оптимальным такое расположение датчиков, при котором минимизируется среднеквадратическая ошибка восстановления СП.

Ограничения на число измерителей (датчиков) чаще всего обусловлены высокой стоимостью самих датчиков, а также затратами, связанными с процедурой их установки. В связи с этим целесообразной является разработка алгоритмов оптимального позиционирования ограниченного количества датчиков на многомерной сетке. При этом датчики могут быть распределены по сетке некоторым множеством способов, т.е. имеется набор планов размещения датчиков на многомерной сетке и каждому плану размещения соответствует некоторое значение максимальной дисперсии ошибки интерполяции. В данном случае, очевидно, возникает задача нахождения некоторого оптимального плана размещения. В качестве критерия оптимальности может быть выбран минимум максимальной дисперсии ошибки интерполяции.

Данная задача предполагает применение методов математического программирования и относится к классу экстремальных задач, в которых задается некоторое множество **C** допустимых решений, представляющих собой возможные планы размещения датчиков, а на этом множестве задается целевая функция $f(x) = P_{\max}$, представляющая собой максимальное значение дисперсии ошибки интерполяции, и требуется найти такой элемент $x_0 = C_{opt}$, $C_{opt} \in \mathbf{C}$, на котором значение $f(x_0)$ будет наименьшим, т.е. $f(x) = P_{\max} \to \min$. Термин *допустимое решение* связан с рядом ограничений на конфигурацию датчиков (симметричность расположения относительно центра, отсутствие наложения друг на друга и т.п.). Искомое допустимое решение x_0 называется оптимальным (экстремальным) решением и представляет собой план размещения датчиков, на котором достигается наименьшее допустимое значение максимальной дисперсии ошибки интерполяции [38, 39, 62, 64, 65].

В известных работах [95, 100, 105, 116, 124] подобные задачи решались преимущественно градиентными методами, однако во многих случаях (особенно на многомерных сетках) их эффективность зависит от удачного выбора начальных точек. Кроме этого возникает опасность попадания в ложный оптимум, и поэтому применение градиентных алгоритмов для решения вышеупомянутой задачи зачастую представляется затруднительным.

Таким образом, возникает задача получения строго оптимального алгоритма поиска наилучшего размещения датчиков на дискретной сетке, который можно было бы в дальнейшем использовать для проверки функционирования градиентных и других алгоритмов поиска.

3.2. Оптимизация размещения пилот-сигналов на последовательности отсчетов

В большинстве современных систем извлечения информации используется равномерное (регулярное) размещение датчиков, при котором дисперсия ошибки интерполяции достигает своего максимума на границах сетки. В частности, в многочастотных системах связи при равномерной расстановке пилот-сигналов дисперсия ошибки достигает своего максимума на границах частотного диапазона [119].

В связи с этим возникает задача снижения максимальной дисперсии ошибки или сокращения количества пилот-сигналов при заданном допустимом значении максимальной дисперсии. Очевидно, что одним из путей снижения дисперсии ошибки является разработка алгоритма поиска некоторой, в общем случае неравномерной, оптимальной расстановки пилот-сигналов, позволяющей минимизировать дисперсию ошибки [17].

Одним из возможных способов решения данной задачи является полный перебор всех возможных вариантов (планов) расстановки пилот-сигналов [72, 73]. Однако при больших размерах сетки подобный способ может потребовать значительных вычислительных затрат. В связи с этим возникает необходимость разработки алгоритма улучшенного перебора вариантов расстановки.

Алгоритм полного перебора. Исходными данными являются длина последовательности n элементов, количество пилот-сигналов m_p и параметры модели случайной последовательности, представляющей собой в общем случае уравнение авторегрессии-скользящего среднего [7] с добавлением аддитивного шума θ: коэффициент корреляции ρ и отношение сигнал/шум $q = \sigma_X^2 / \sigma_\theta^2$. Блок-схема алгоритма изображена на рис. 3.3.

Вначале задаются начальные позиции пилот-сигналов $p(k)$, где k - порядковый номер, присваиваемый каждому конкретному пилот-сигналу, причем $k = 1 \ldots m_p$, $p = 1 \ldots n$. При этом всегда необходимо выполнение условия: $p(k) > p(k-1)+1$, т.е. k-й пилот-сигнал может перемещаться только между текущими позициями $(k-1)$-го и $(k+1)$-го пилот-сигналов, соответственно. Кроме этого, между двумя соседними пилот-сигналами должен быть хотя бы один информационный символ. Если количество пилот-сигналов m_p - нечётное число, очевидно, что для соблюдения условия симметричности (график дисперсии ошибки оптимальной линейной фильтрации всегда симметричен относительно центра) длина последовательности тоже должна быть нечетным числом и один пилот-сигнал всегда будет находиться в центре последовательности (восьмая позиция на рис. 3.1).

При осуществлении перебора вариантов расстановки пилот-сигналов последовательность делится на две части, симметричные относительно центра. Причем расстановка осуществляется для пилот-сигналов, находящихся на левой половине последовательности, а правая половина затем получается в виде зеркального отображения левой части с пилот-сигналами (рис. 3.1). Ниже будем считать величину m' - количеством пилот-сигналов, размещаемых на одной половине последовательности.

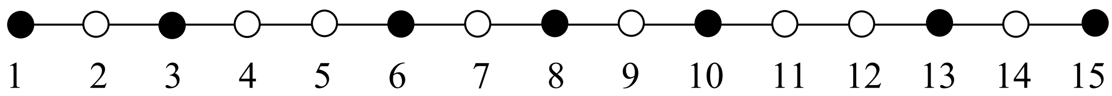


Рис. 3.1

Вначале со своей стартовой позиции $p_b(m')$ перемещается m'-й пилот-сигнал до тех пор, пока не достигнет своей конечной позиции $p_f(m')$ и затем возвращается на другую позицию, отстоящую на шаг вперед $p_b(m')+1$. После этого перемещается предыдущий пилот-сигнал с позиции $p_b(m'-1)$ на позицию $p_b(m'-1)+1$, а последующий m'-й пилот-сигнал делает очередной цикл со своей текущей стартовой позиции $p_b(m')+1$ и затем возвращается на новую текущую стартовую позицию, отстоящую на шаг вперед $p_b(m')+2$. После этого предыдущий пилот-сигнал делает еще один шаг с позиции $p_b(m'-1)+1$

на позицию $p_b(m'-1)+2$ и так до тех пор, пока все пилот-сигналы не займут свои конечные позиции $p_f(k),\ k=1\ldots m'$.

Общее количество планов расстановки можно вычислить по следующей формуле

$$P_s = \sum_{k_{s-1}=1}^{k_s} \ldots \sum_{k_1=1}^{k_2} \frac{k_1(k_1-1)}{2},$$

где s - количество подвижных пилот-сигналов, находящихся на левой половине последовательности, $k_s = k_{s-1} = \ldots = k_1 = \frac{n+1}{2} - (2s+1)$, $s = \frac{m_p - 3}{2}$.

При описании СП процессом двумерной авторегрессии [16] можно воспользоваться уравнениями Калмана [4, 69]. Тогда получение дисперсии ошибок оценивания СП и включает в себя следующие шаги:

$P_{Эk} = \rho^2 P_{k-1} + v_k v_k^T$ - дисперсия ошибки экстраполяции ($P_{Э1} = V_X$),

$P_k = \dfrac{P_{Эk}}{E + C_k^T V_{\theta k}^{-1} C_k P_{Эk}}$ - дисперсия ошибки оценивания,

где ρ - коэффициент корреляции, $v_k = \sigma_X \sqrt{1-\rho^2}$, $V_{\theta k}^{-1} = q_k = \sigma_X^2 / \sigma_\theta^2$,

C_k - k-й элемент вектора $\mathbf{C}$ плана расстановки; $\mathbf{C} = \underbrace{[1\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,1\ldots 0\,0\,1]}_{n}$,

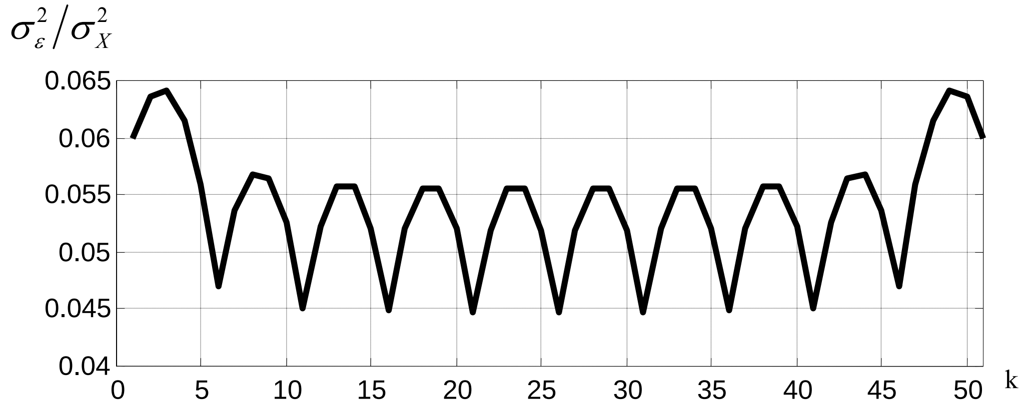
причем единицы расположены на позициях, соответствующих пилот-сигналам.

Для сглаживания оценок осуществляется обратный проход:

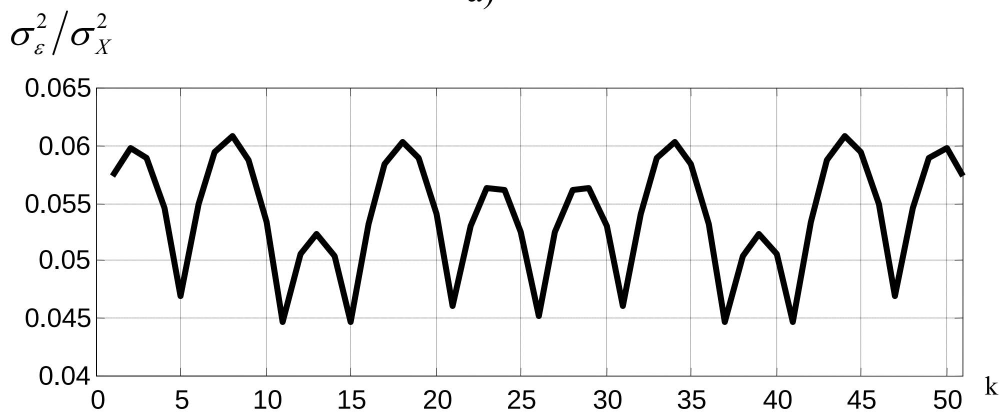
$P_N^* = P_N$, $P_k^* = P_k + A_k \left(P_{k+1}^* - P_{Э(k+1)} \right) A_k^T$,

где $A_k = P_k \rho P_{Э(k+1)}^{-1}$, $k = N, N-1, \ldots, 1$.

При этом в точках, где отсутствуют наблюдения, при фильтрации полагаем ОСШ q_k=0. Далее находится максимальное значение дисперсии ошибки для данной j-й последовательности (плана расстановки) $P_{j\max}^*$ и сравнивается с предыдущим, если $P_{j\max}^* < P_{(j-1)\max}^*$, то за оптимальный план расстановки принимается $\mathbf{C}_{opt} = \mathbf{C}(j)$ и так до тех пор, пока не будут «проверены» все



а)



б)

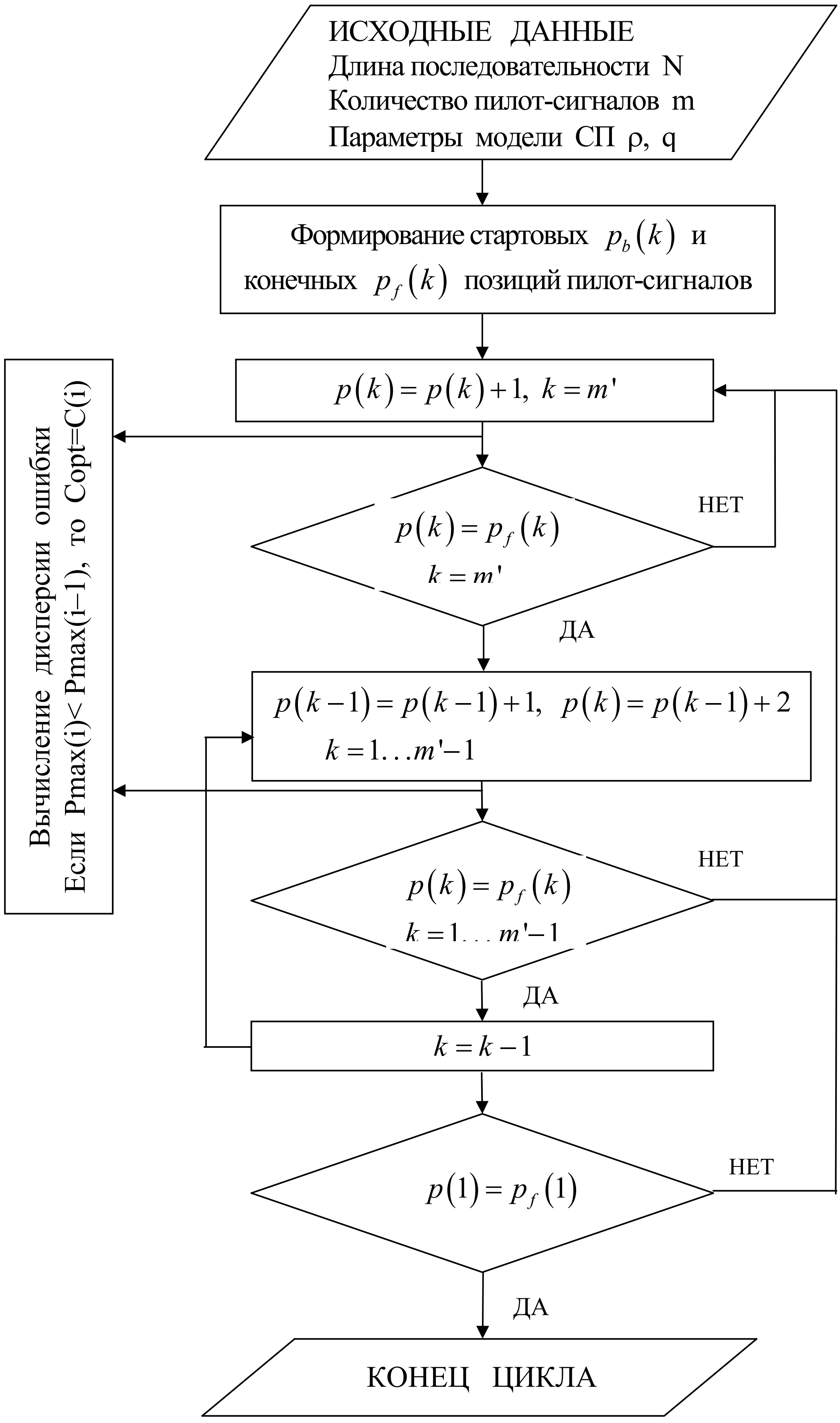
Рис. 3.2

возможные планы расстановки пилот-сигналов. В конечном итоге получается оптимальный план расстановки пилот-сигналов $\mathbf{C}_{opt}$ с наименьшей максимальной дисперсией ошибки интерполяции.

На рис. 3.2 показаны зависимости дисперсии оценивания при разных схемах расстановки одного и того же количества пилот-сигналов: а – равномерная расстановка, б – оптимальная расстановка.

Анализ графиков, представленных на рис. 3.2, показывает выигрыш максимальной дисперсии оценивания при неравномерной схеме расстановки пилот-сигналов (рис. 3.2, б), полученной с помощью алгоритма полного перебора по сравнению с равномерной расстановкой (рис. 3.2, а).

В дальнейшем производится сравнение получаемой величины максимальной дисперсии ошибки интерполяции для равномерной расстановки и оптимального варианта расстановки того же количества пилот-сигналов, на основе чего делается вывод о преимуществе нерегулярной расстановки.



ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ
Длина последовательности N
Количество пилот-сигналов m
Параметры модели СП ρ, q
Формирование стартовых $p_b(k)$ и конечных $p_f(k)$ позиций пилот-сигналов
$p(k)=p(k)+1,\ k=m'$
Вычисление дисперсии ошибки
Если Pmax(i)< Pmax(i–1), то Copt=C(i)
$p(k)=p_f(k)$
$k=m'$
НЕТ
ДА
$p(k-1)=p(k-1)+1,\ \ p(k)=p(k-1)+2$
$k=1\ldots m'-1$
$p(k)=p_f(k)$
$k=1\ldots m'-1$
НЕТ
ДА
$k=k-1$
$p(1)=p_f(1)$
НЕТ
ДА
КОНЕЦ ЦИКЛА

Рис. 3.3

Для удобства сравнения с регулярным случаем требуется подстраивать размеры сетки и количество пилот-сигналов под заданную регулярную расстановку.

Алгоритм улучшенного перебора. В процессе исследований при рассмотрении различных оптимальных планов расстановки, соответствующих различным параметрам случайной последовательности ρ и q, а также различному количеству пилот-сигналов, были замечены следующие две закономерности. Первая заключается в следующем: для любого оптимального плана расстановки пилот-сигналов соблюдается соотношение вида

$$\frac{p(k+1)-p(k)}{p(k)-p(k-1)} \geq 7/10. \tag{3.1}$$

Вторая закономерность состоит в том, что конечные допустимые позиции пилот-сигналов не могут превышать соответствующие позиции этих же пилот-сигналов при их равномерной расстановке более, чем на единицу, т.е.

$$p_f(k) \leq p_r(k)+1, \tag{3.2}$$

где $p_r(k)$ - позиция k-го пилот-сигнала при равномерной расстановке.

Данные соотношения (3.1), (3.2) ни разу не нарушались для случаев $n=31\left(m_p=7, 11\right)$ и $n=49\left(m_p=5, 9, 13\right)$ при изменении параметров случайной последовательности $0<\rho<1$ и $-20\ дБ < q < 20\ дБ$ (проверено путем сравнения с результатами, полученными с помощью алгоритма полного перебора). В силу этого соотношения (3.1) и (3.2) были положены в основу алгоритма улучшенного перебора, блок-схема которого изображена на рис. 3.4.

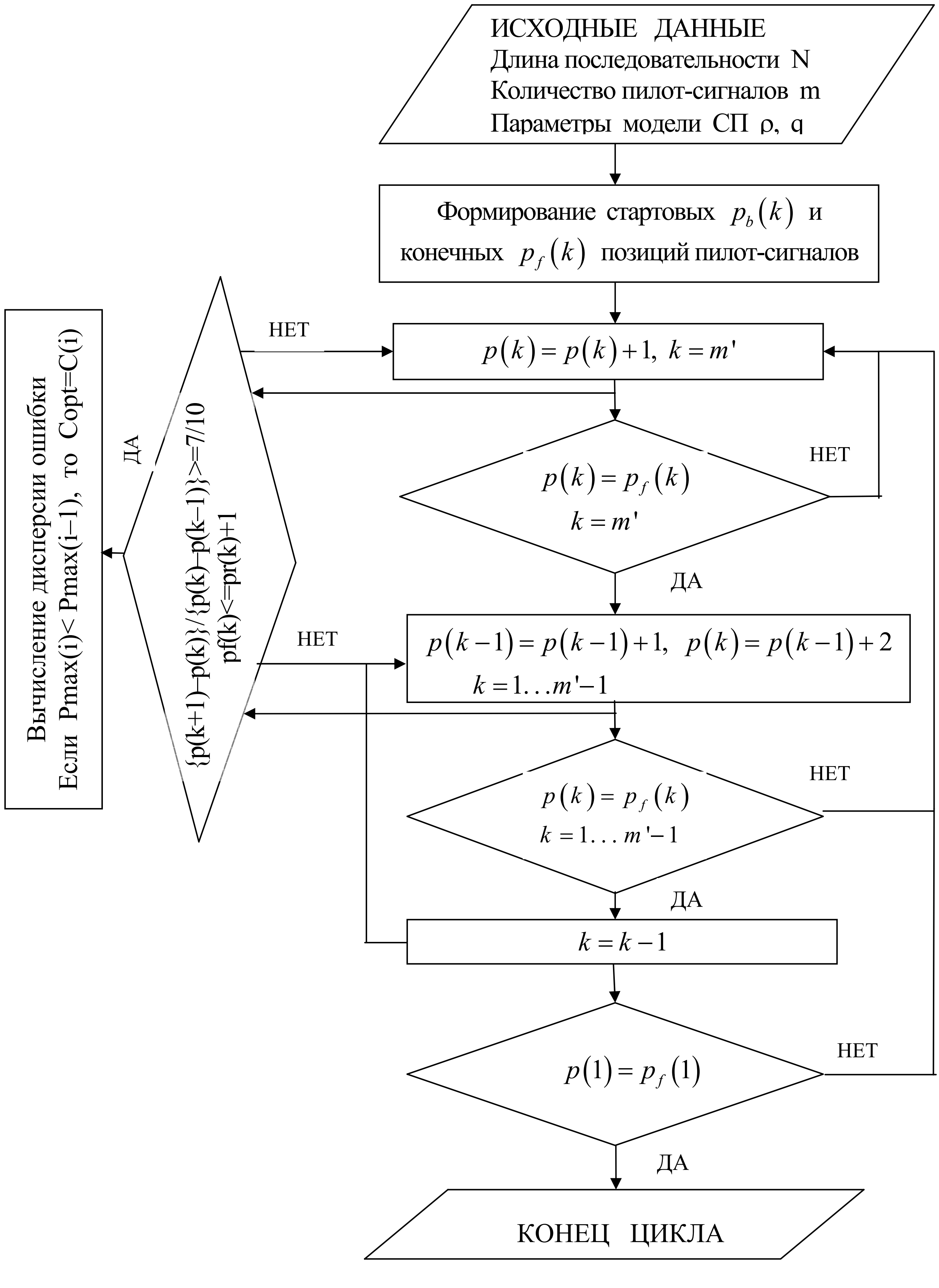
Данный алгоритм позволяет существенно уменьшить количество планов расстановки, подвергаемых фильтрации, что в конечном итоге значительно снижает вычислительные затраты (табл. 3.1).

Кроме этого, замечено, что при сильных корреляциях $\rho>0.995$ и(или) сильном шуме $q<-10$ дБ в случае оптимальной расстановки все пилот-сигналы «прижимаются» к краям одномерной сетки. В то время как при слабых корреляциях $\rho < 0.9$ и(или) слабом шуме $q > 15$ дБ оптимальная расстановка пилот-сигналов приближается к равномерной (регулярной).

Таблица 3.1

Параметры плана расстановки	Полный перебор	Улучшенный перебор
$n = 31,\ m_p = 7$	40	18
$n = 31,\ m_p = 11$	360	46
$n = 49,\ m_p = 5$	12	11
$n = 49,\ m_p = 9$	840	123
$n = 49,\ m_p = 13$	23040	483

На рис. 3.5 (а, б) показаны зависимости выигрыша оптимального плана размещения по сравнению с регулярным по максимальной дисперсии ошибки интерполяции для последовательности отсчетов. На основании этих графиков можно сделать вывод о том, что при уменьшении количества пилот-сигналов, размещаемых на дискретной сетке, коэффициенты корреляции, соответствующие максимальному значению выигрыша, заметно увеличиваются. Кроме этого, выигрыш увеличивается с увеличением ОСШ q. Также одной из закономерностей является увеличение коэффициента корреляции, соответствующего максимальному выигрышу при увеличении ОСШ q.



ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ
Длина последовательности N
Количество пилот-сигналов m
Параметры модели СП ρ, q
Формирование стартовых $p_b(k)$ и конечных $p_f(k)$ позиций пилот-сигналов
$p(k)=p(k)+1,\ k=m'$
$p(k)=p_f(k)$
$k=m'$
НЕТ
ДА
$p(k-1)=p(k-1)+1,\ \ p(k)=p(k-1)+2$
$k=1\ldots m'-1$
$p(k)=p_f(k)$
$k=1\ldots m'-1$
НЕТ
ДА
$k=k-1$
$p(1)=p_f(1)$
НЕТ
ДА
КОНЕЦ ЦИКЛА
{p(k+1)–p(k)}/{p(k)–p(k–1)}>=7/10
pf(k)<=pr(k)+1
НЕТ
НЕТ
ДА
Вычисление дисперсии ошибки
Если Pmax(i)< Pmax(i–1), то Copt=C(i)

Рис. 3.4

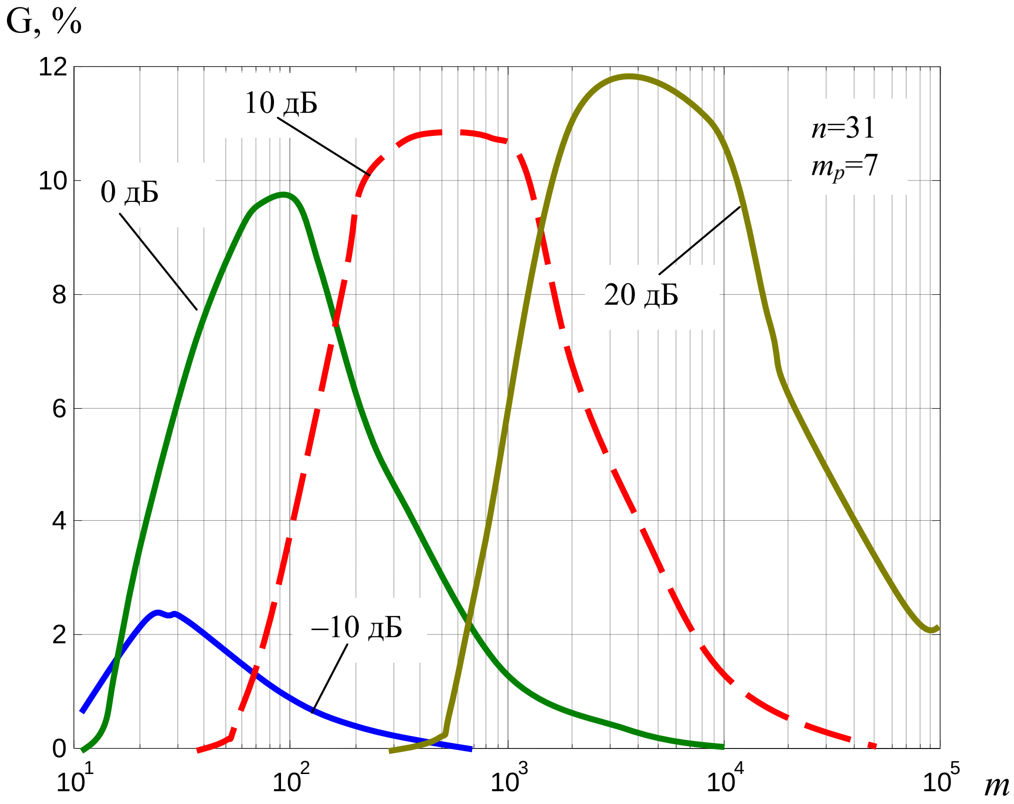


Рис.3.5, а

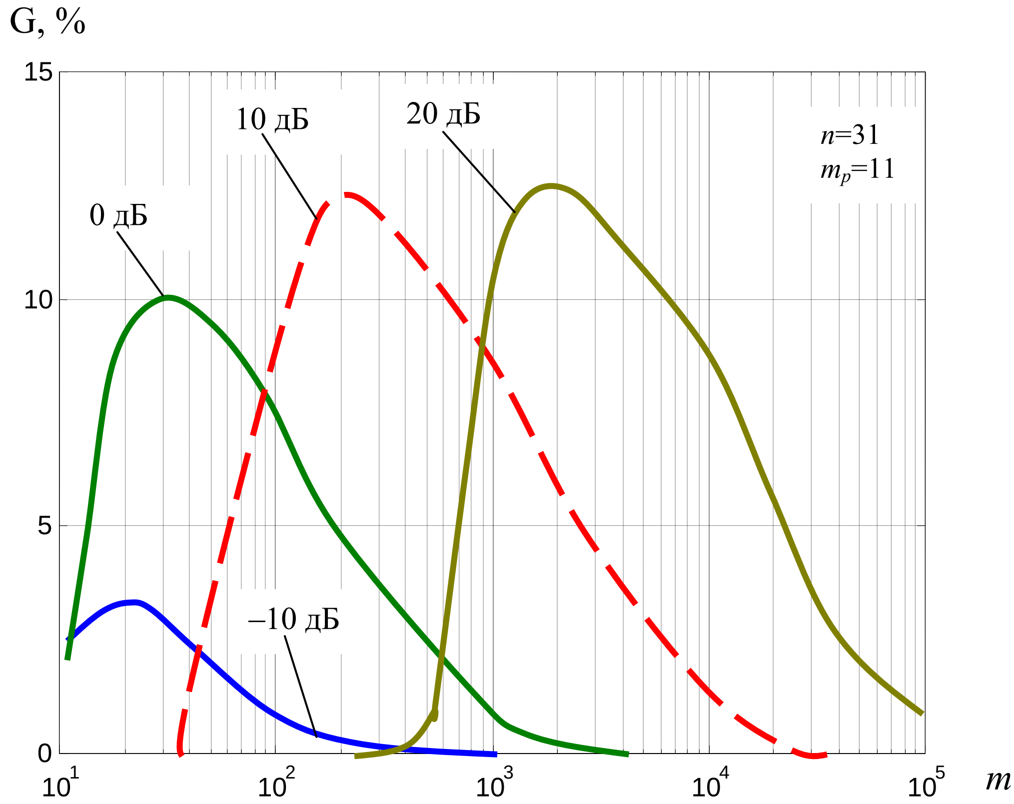


Рис.3.5, б

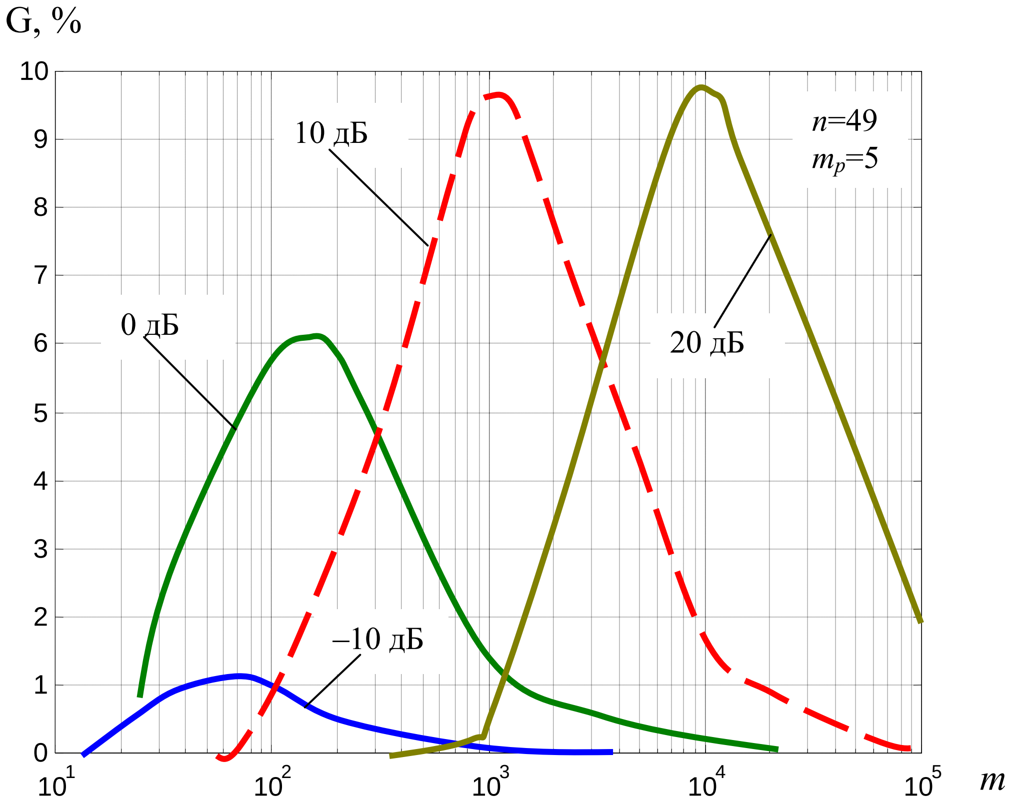


Рис.3.6, а

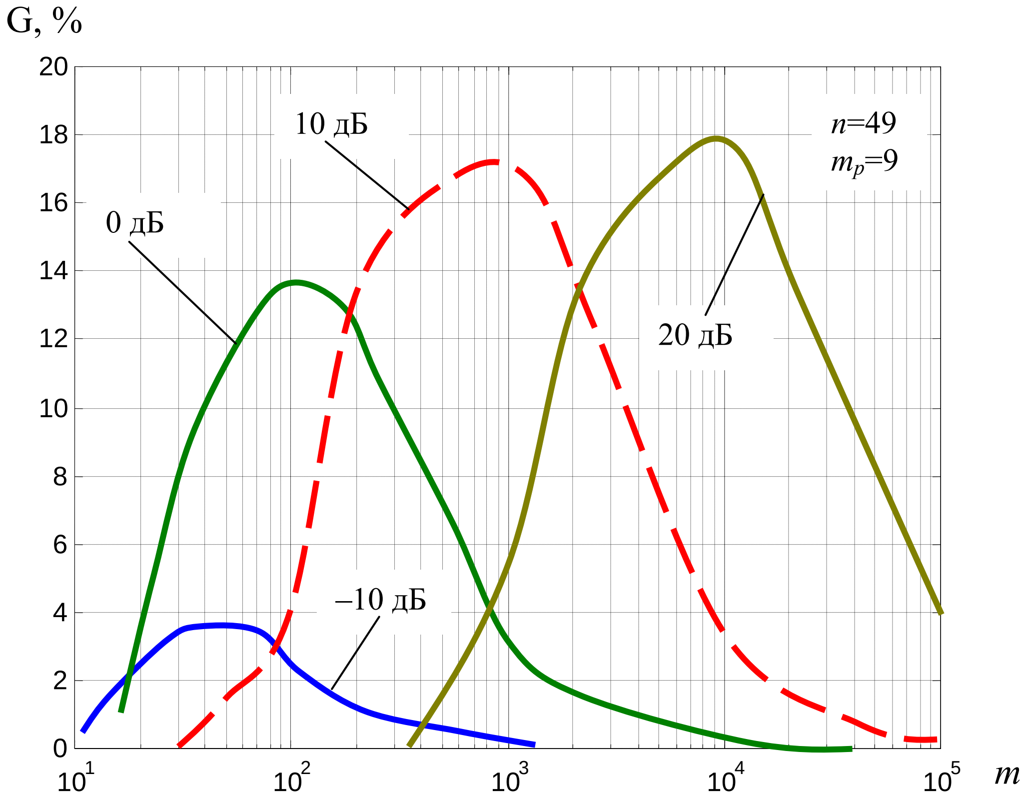


Рис.3.6, б

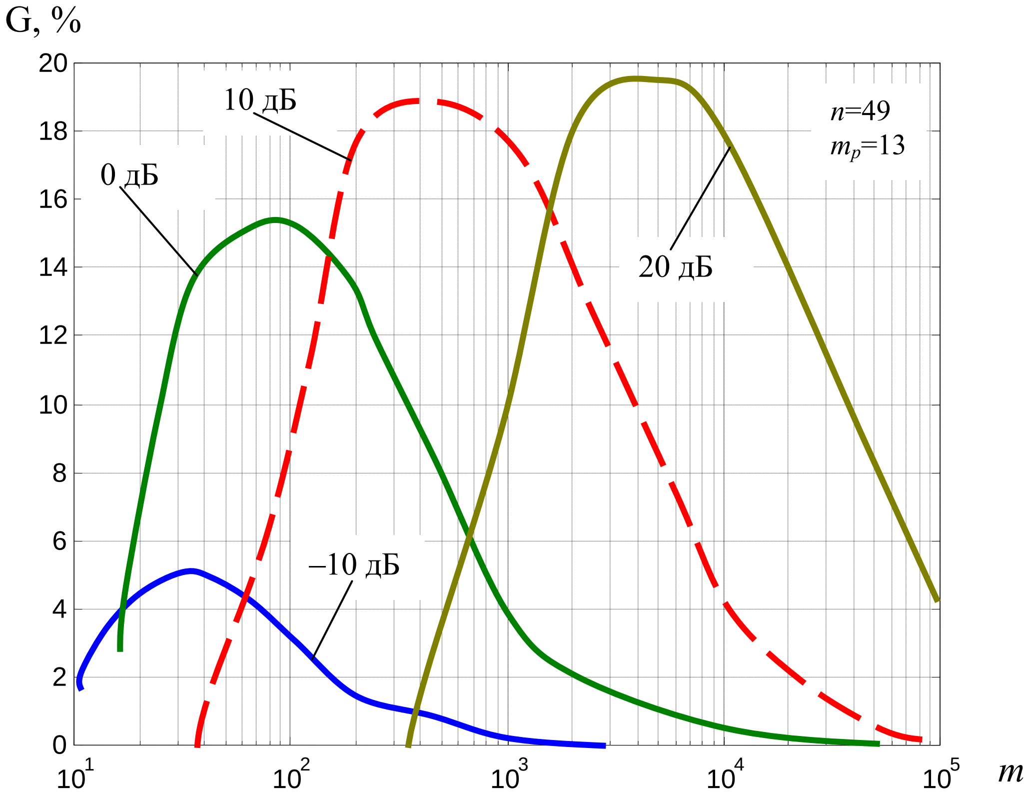


Рис.3.6, в

На рис. 3.6 (а, б, в) показаны зависимости, аналогичные рис. 3.5. На основе их анализа можно сделать дополнительные выводы. При уменьшении количества пилот-сигналов, размещаемых на дискретной сетке, коэффициенты корреляции, соответствующие максимальному значению выигрыша, увеличиваются не так заметно как на рис. 3.5. Кроме этого, при увеличении количества пилот-сигналов достижимое снижение величины дисперсии ошибки интерполяции существенно возрастает: для последовательности длины n=49 при увеличении количества пилот-сигналов от m_p=5 до m_p=13 максимальный выигрыш увеличивается в 2 раза, в то время как аналогичный выигрыш на рис. 3.5 для последовательности длины n=31 при увеличении количества пилот-сигналов от m_p=7 до m_p=11 увеличивается незначительно (на 0.7 %).

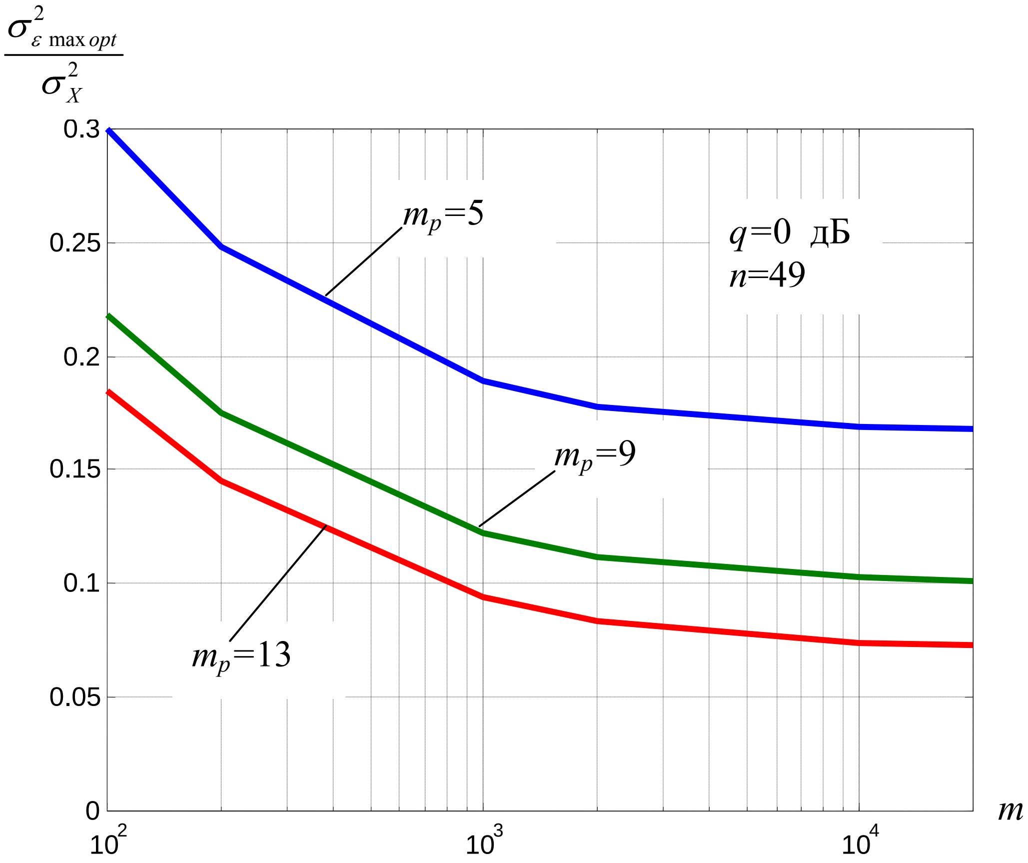


Рис. 3.7, а

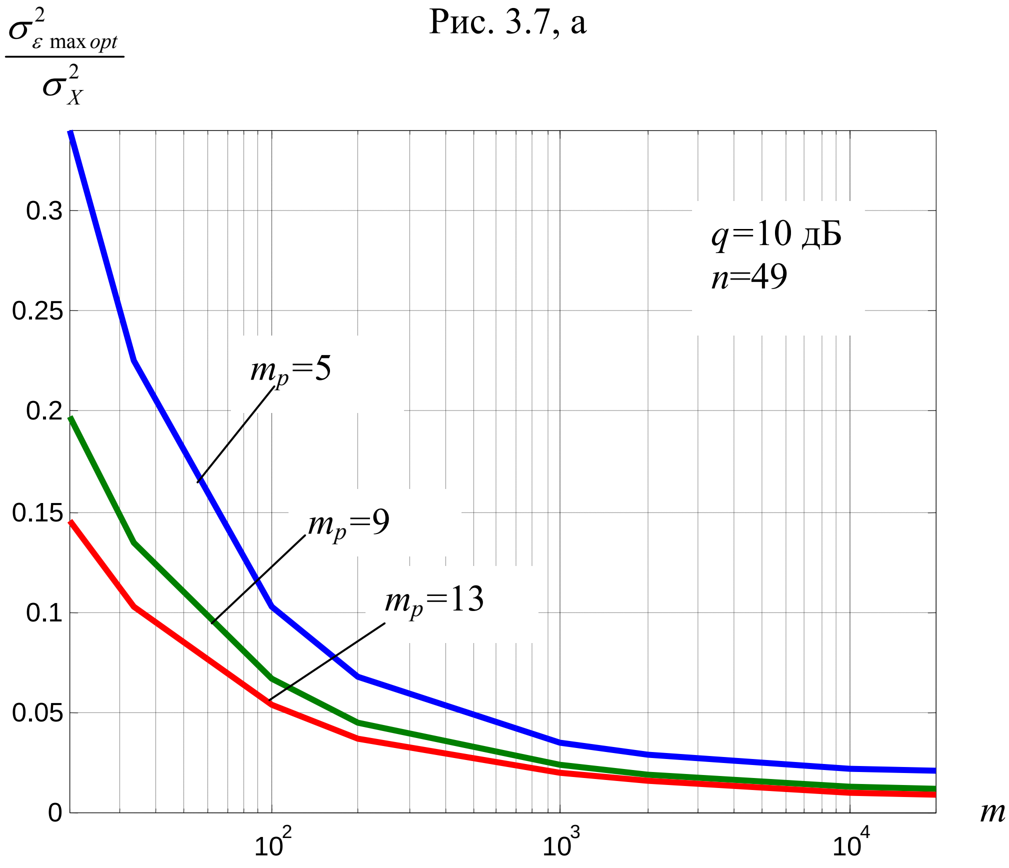


Рис. 3.7, б

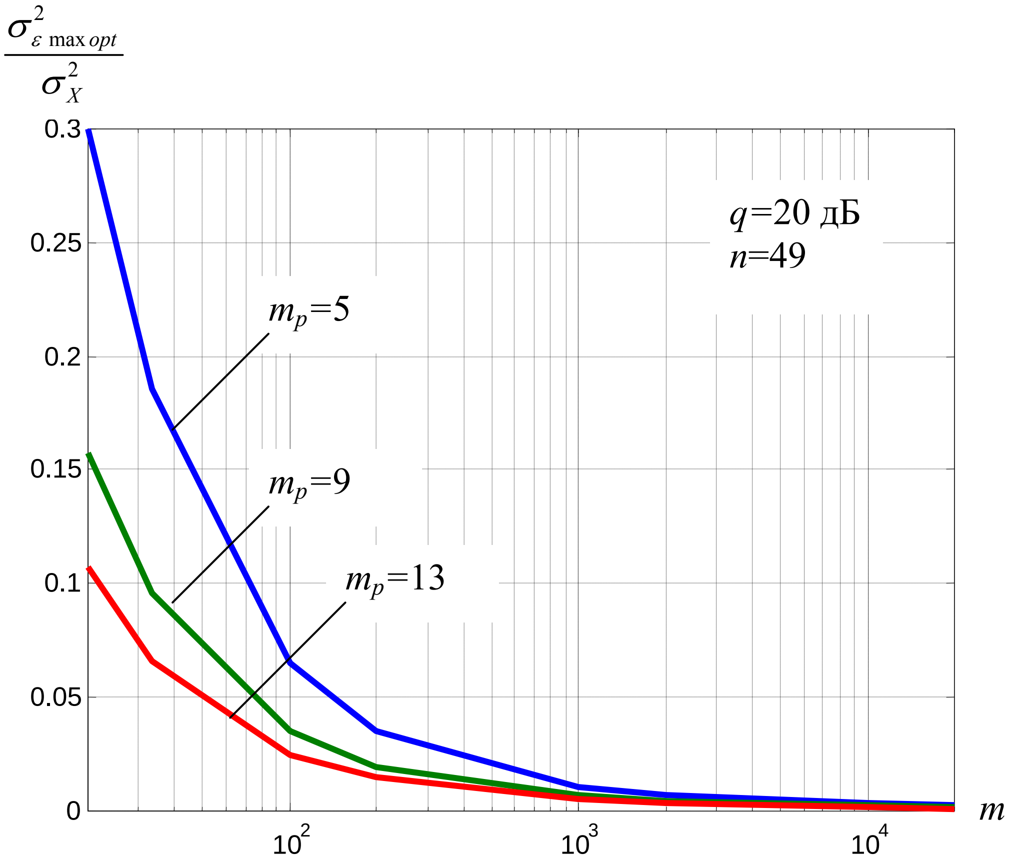


Рис. 3.7, в

Значительный интерес представляет анализ максимальной дисперсии ошибки интерполяции для оптимального плана расстановки пилот-сигналов $\sigma^2_{\varepsilon\,\max\,opt}$ на последовательности отсчетов заданной длины n при изменении количества пилот-сигналов m_p, а также различных параметрах СП ρ и q. На рис. 3.7 представлены зависимости относительной максимальной дисперсии ошибки интерполяции $\sigma^2_{\varepsilon\max opt} \big/ \sigma^2_X$ для оптимального плана от интервала корреляции $m = 1\big/(1-\rho)$ при различном количестве пилот-сигналов m_p.

На графиках рис. 3.7 показано, что приемлемое качество интерполяции достигается при малых шумах $q \geq 10$ дБ и сильной корреляции $\rho > 0.99$, причем с увеличением коэффициента корреляции от $\rho = 0.999$ и выше (при $q > 20$ дБ) дисперсия ошибки интерполяции изменяется несущественно и практически не зависит от количества пилот-сигналов m_p. В то же самое время при сильных шумах ($q < 0$ дБ) приемлемого качества интерполяции можно достичь лишь при очень сильной корреляции $\rho > 0.999$ и большом количестве пилот-сигналов $m_p \geq n/4$. Кроме этого, на графиках можно наблюдать сходимость максимальной дисперсии ошибки интерполяции к некоторому асимптотическому значению при $m > 10^4$.

3.3. Оптимизация размещения пилот-сигналов на двумерной сетке

До настоящего времени задача поиска оптимального плана размещения пилот-сигналов на двумерной сетке решалась в ряде зарубежных работ [95, 100, 105, 116, 124], в которых рассмотрены градиентные алгоритмы, позволяющие получить, по крайней мере, квазиоптимальное решение задачи для полукаузальных и некаузальных моделей СП. Однако описываемые в этих работах градиентные алгоритмы не всегда позволяют достичь глобально оптимального решения и зачастую дают локально оптимальное решение. Кроме этого, в известных алгоритмах используется критерий оптимальности, требующий минимизации следа матрицы ковариаций ошибок оценивания $J = Tr\ P_j \to \min$, в то время как зачастую возникает необходимость получения плана размещения пилот-сигналов с минимумом максимальной дисперсии ошибки оценивания на всем СП $J = P_{j\,\max} \to \min$.

Рассмотрим данные алгоритмы подробнее.

Полукаузальные модели. Все рассматриваемые в литературе [16, 134] полукаузальные модели допускают единое представление

$$\mathbf{u}_j = F\mathbf{u}_{j-1} + G\,\xi_j, \tag{3.3}$$

где матрицы F и G определены соотношениями (1.17), (1.18), (1.46).

Не нарушая общности задачи, запишем уравнение наблюдения в виде

$$\mathbf{z}_j = H_j\mathbf{u}_j + \theta_j. \tag{3.4}$$

Дисперсия калмановской ошибки восстановления для системы (3.3), (3.4) на j-м шаге, представляющем собой очередной анализируемый план размещения датчиков, имеет вид

$$\begin{aligned} &P_{Э j} = FP_{j-1}F^T + GR_{\xi j}G^T, \\ &P_j = P_{Э j} - P_{Э j}H_j^T\left(H_jP_{Э j}H_j^T + R_{\theta j}\right)^{-1}H_jP_{Э j}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Оптимальным для момента j считается такое расположение датчиков, при котором

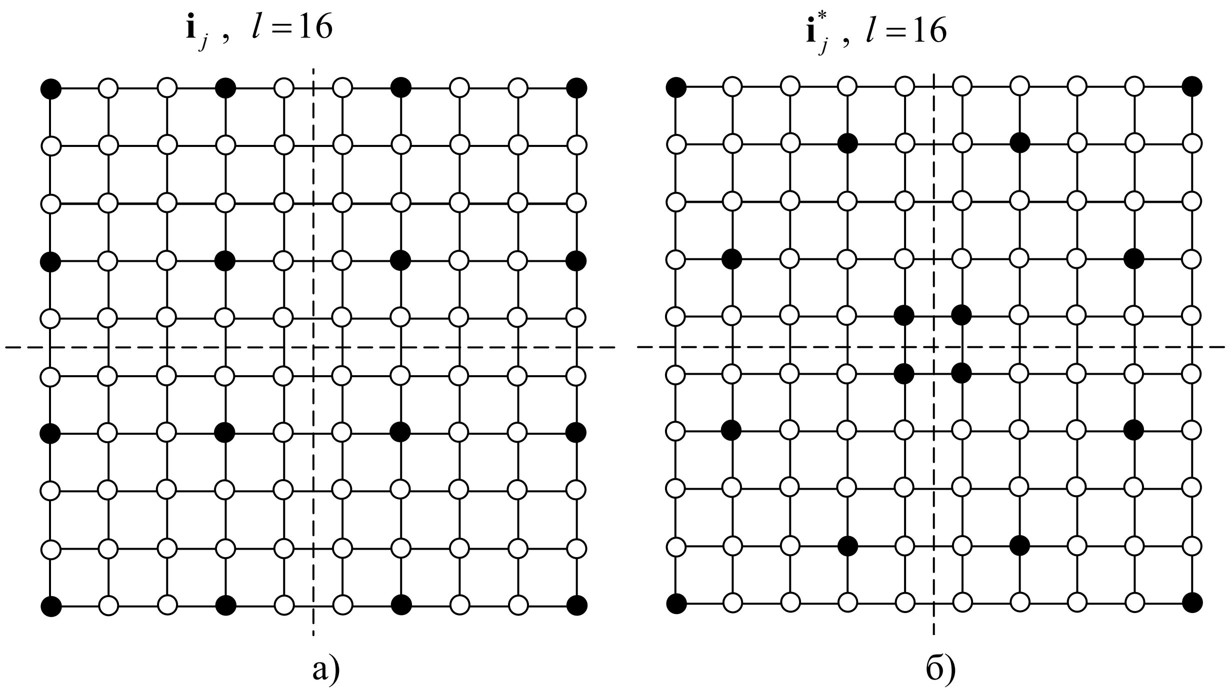


Рис. 3.8

$$J = Tr\ P_j \to \min . \tag{3.6}$$

Минимум в (3.6) ищется по текущим координатам расположения датчиков. При поиске оптимального решения естественно считать, что в предшествующий момент $(j-1)$ датчики закреплены так, что P_{j-1}, $P_{Эj}$ - некоторые константы.

Пусть в момент j измерения производятся l датчиками, расположенными в последовательных (произвольных) точках $\mathbf{i}_j = [i_1, i_2, \ldots, i_l]^T$ (рис. 3.8, а). При этом ставится задача перейти к оптимальной по критерию (3.6) конфигурации $\mathbf{i}_j^* = \left[i_1^*, i_2^*, \ldots, i_l^* \right]^T$ (рис. 3.8, б).

В работе [21] отмечается, что дискретное синусное преобразование (ДПС) позволяет перейти от (3.3) к несвязанным скалярным уравнениям, т.е. является собственным преобразованием F и G для любой рассмотренной полукаузальной модели. Переопределим задачу, осуществив переход

$$\tilde{\mathbf{x}}_j = \Phi \mathbf{x}_j, \quad \tilde{P}_j = \Phi P_j \Phi ,$$

где Φ - матрица ДПС. Очевидно, $Tr\,\tilde{P}_j = Tr\,P_j$ в силу унитарности Φ, поэтому можно перейти к эквивалентному критерию

$$J = Tr\,\tilde{P}_j \to \min_{i_1,\ldots,i_l}. \tag{3.7}$$

Из (3.5) следует

$$\begin{aligned} &\tilde{P}_{Эj} = \Lambda_1 \tilde{P}_{j-1} \Lambda_1 + \Lambda_2 \tilde{R}_{\xi\,j} \Lambda_2, \\ &\tilde{P}_j = \tilde{P}_{Эj} - \tilde{P}_{Эj} \tilde{H}_j^T \left(\tilde{H}_j \tilde{P}_{Эj} \tilde{H}_j^T + R_{\theta\,j} \right)^{-1} \tilde{H}_j \tilde{P}_{Эj}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

где $\Lambda_1 = \Phi F \Phi = diag\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_N\right)$, $\Lambda_2 = \Phi G \Phi = diag\left(\mu_1, \ldots, \mu_N\right)$, $\tilde{R}_{\xi\,j} = \Phi R_{\xi\,j} \Phi$,

$$\tilde{H}_j = H_j \Phi = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \begin{bmatrix} \sin\dfrac{\pi i_1}{N+1} & \cdots & \sin\dfrac{N\pi i_1}{N+1} \\ \vdots & & \vdots \\ \sin\dfrac{\pi i_l}{N+1} & \cdots & \sin\dfrac{N\pi i_l}{N+1} \end{bmatrix}.$$

Теперь, определив градиент функционала (3.7)

$$\frac{\partial J}{\partial i_k} = -Tr\left[A_j^T B_j + B_j^T A_j - B_j^T \left(\nabla_{i_k} \tilde{H}_j C_j^T + C_j \nabla_{i_k} \tilde{H}_j^T + \nabla_{i_k} R_{\theta\,j} \right) B_j \right],\ k = \overline{1,l},$$

где $A_j = \nabla_{i_k} \tilde{H}_j \tilde{P}_{Эj}$, $B_j = \left[\tilde{H}_j \tilde{P}_{Эj} \tilde{H}_j^T + R_{\theta\,j} \right]^{-1} \tilde{H}_j \tilde{P}_{Эj}$, $C_j = \tilde{H}_j \tilde{P}_{Эj}$,

$\nabla_{i_k} \tilde{H}_j = \left(\partial / \partial i_k \right) \tilde{H}_j$ - матрица, лишь одна из строк которой (с номером i_k) отлична от нуля и образована элементами

$$\sqrt{\frac{2}{N+1}} \frac{\pi}{N+1} \cos\frac{\pi i_k}{N+1}, \ldots, \sqrt{\frac{2}{N+1}} \frac{N\pi}{N+1} \cos\frac{N\pi i_k}{N+1},$$

можно для отыскания $\mathbf{i}^*$ воспользоваться каким-либо из градиентных методов.

В работах [95, 116] для этой цели используется модифицированный метод градиентов:

$$\mathbf{i}_j(n+1) = \mathbf{i}_j(n) + \left\{ \Omega_j(n) \mathbf{d}_j(n) \right\},$$

$$\mathbf{d}_j(n) = -\mathbf{g}_j(n) + \eta \mathbf{d}_j(n-1) \alpha,$$

$$\alpha = \mathbf{g}_j^T(n) \mathbf{g}_j(n) \big/ \mathbf{g}_j^T(n-1) \mathbf{g}_j(n-1),$$

где $\{\bullet\}$ означает операцию округления к ближайшему целому;

$$\mathbf{g}_j^T = \left[\frac{\partial J}{\partial i_1}, \ldots, \frac{\partial J}{\partial i_l}\right]\Bigg|_{i_j = i_j(n)};$$

$\Omega_j(n) = diag\left(\omega_1(n), \ldots, \omega_l(n)\right)$ - матрица множителей, которая используется для ускорения сходимости.

На первых шагах алгоритма $\eta = 0$ (метод градиентов) вблизи оптимума для ускорения сходимости можно положить $\eta = 1$ (метод сопряженных градиентов).

Следует заметить, что процедура отыскания $\mathbf{i}_j^*$ многошаговая. В случае, когда интерес представляет лишь асимптотическое размещение измерителей $\left(j \to \infty,\ R_{\xi j} = const,\ l = const\right)$, итерации i_j можно совместить с решением (3.8). В работе [95] доказывается сходимость такой процедуры.

Некаузальные модели. Из (1.34) можно получить винеровскую ошибку восстановления упорядоченного по строкам изображения [1, 69]

$$J = Tr\left[R_X - R_X H^T \left(H R_X H^T + R_\theta\right)^{-1} H R_X\right],$$

где R_X определяется моделью изображения, а измерению с координатами (k,l) соответствует строка матрицы H, содержащая $N^2 - 1$ нулей и единицу в позиции $(k-1)\times(N+l)$.

Собственным преобразованием рассматриваемых некаузальных моделей является ДПС. При этом матрица преобразования запишется как $\psi = \Phi \otimes \Phi$, где Φ - матрица ДПС, которая соответствует N-точечному ДПС.

Аналогично случаю полукаузальной модели можно получить следующие преобразования:

$$\Lambda = \psi R_X \psi, \quad Tr\ R_X = Tr\ \Lambda, \quad J = Tr\left[\Lambda - \Lambda\tilde{H}^T\left(\tilde{H}\Lambda\tilde{H}^T + R_\theta\right)^{-1}\tilde{H}\Lambda\right], \quad \tilde{H} = H\psi.$$

Задача оптимального размещения датчиков теперь заключается в том, чтобы минимизировать J на множестве пар (k,l).

Определяя Φ его столбцами $\Phi = \left[\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_N\right]$, получим

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial k} = \frac{\partial \mathbf{f}_k}{\partial k} \otimes \mathbf{f}_l = \sqrt{\frac{2}{N+1}}\frac{\pi}{N+1}\begin{bmatrix} \cos\frac{k\pi}{N+1} \\ \cdots \\ N\cos\frac{Nk\pi}{N+1} \end{bmatrix} \otimes \mathbf{f}_l, \ \frac{\partial \tilde{H}}{\partial l} = \mathbf{f}_k \otimes \frac{\partial \mathbf{f}_l}{\partial l} = \mathbf{f}_k \otimes \sqrt{\frac{2}{N+1}}\frac{\pi}{N+1}\begin{bmatrix} \cos\frac{l\pi}{N+1} \\ \cdots \\ N\cos\frac{Nl\pi}{N+1} \end{bmatrix}.$$

В остальном задача полностью аналогична уже рассмотренной, и алгоритм размещения разнится с предшествующим лишь в очевидных деталях, связанных с появлением вектора направления.

Описанный алгоритм использовался в работе [21] для расстановки датчиков в марковском поле (модель НК1 в табл. 1.1). Исследования показали, что обсуждаемый алгоритм оптимального размещения дает устойчивые результаты, фиксируя измерители в непосредственной близости от точек оптимума (геометрическое расстояние $\sqrt{\left(k-k^*\right)^2+\left(l-l^*\right)^2} \le \sqrt{2}$ при различном начальном расположении измерителей). При этом различия в ошибке восстановления не превышают 1%.

Следует подчеркнуть, что рассмотренные выше алгоритмы оптимального размещения точечных измерителей применимы ко всем описанным прежде полукаузальным и некаузальным моделям (параболические и эллиптические уравнения) и легко обобщаются на модели высших порядков (бигармоническое уравнение и т.д.), т.е. они могут быть широко использованы при обработке полей, описываемых уравнениями математической физики [23, 66].

Наконец, в работе [21] отмечаются два естественных обобщения задачи оптимального размещения. Не являясь исчерпывающими, они представляются полезными. В случае, когда для размещения измерителей есть запрещенные зоны, необходимо на каждом шаге процедуры оптимизации проверять скорректированный вектор координат измерителей на попадание в допустимые области.

Если некоторые области поля следует восстановить с повышенным качеством, можно от (3.6) перейти к модифицированному функционалу

$$J = Tr\left(E + C\right)P_j,$$

где C – диагональная матрица весовых коэффициентов, E - единичная матрица. В остальном схема решения остается прежней.

Очевидно, проверить качество вышеупомянутых алгоритмов можно только с помощью некоторого глобально оптимального алгоритма, которым является алгоритм полного перебора всех возможных планов размещения датчиков (пилот-сигналов) [72, 73].

Алгоритм полного перебора. Как и в случае алгоритма полного перебора для последовательности отсчетов на начальном этапе формируется общая стратегия перебора вариантов расстановки (рис. 3.9). Исходными данными являются размеры поля $n \times n$ элементов, количество пилот-сигналов m_p и параметры модели случайной последовательности (q, ρ, r), где ρ - коэффициент межстрочной корреляции, r - коэффициент внутристрочной корреляции. При этом СП предполагается однородным, т.е. коэффициенты корреляции в обоих направлениях одинаковы $\rho = r$. Блок-схема алгоритма полного перебора на двумерной сетке отсчетов изображена на рис. 3.9. В двумерном случае имеется ряд особенностей и ограничений, отсутствующих в одномерном случае и вызывающих усложнение алгоритма. Одним из ограничений является кратность количества пилот-сигналов четырем, т.е. сетка разбивается на четыре квадранта, причем в каждый квадрант должно попадать одинаковое количество пилот-сигналов. Кроме этого, следует учитывать, что с целью упрощения построения алгоритма полного перебора вначале ¼ общего количества пилот-сигналов $m_{1/4}$ позиционируется в одном из квадрантов и затем соответствующим образом зеркально отображается на остальные три части сетки. Внутри квадранта следует отдельно формировать множества пилот-сигналов, позиционируемых на диагонали $p_d(k)$ - назовем их диагональными пилот-сигналами, и в остальной части квадранта $p_s(k)$ - боковые пилот-сигналы. Если количество пилот-сигналов – нечетное, то на диагонали всегда будет размещаться нечетное число пилот-сигналов. Вначале на диагонали размещается наименьшее возможное количество пилот-сигналов.

Остальные (боковые) пилот-сигналы размещаются внутри квадранта симметрично относительно диагонали – осуществляется полный перебор всех возможных вариантов размещения боковых пилот-сигналов. При этом вся процедура полного перебора вариантов размещения боковых пилот-сигналов в точности соответствует алгоритму полного перебора для последовательности с той лишь разницей, что по окончании процедуры перебора по значению позиции $p(k)$ однозначно определяются двумерные координаты k-го пилот-сигнала $X_{p(k)}$, $Y_{p(k)}$: $A_{p(k)} = ceil\left(\dfrac{-1+\sqrt{1+8p(k)}}{2}\right)$,

$$X_{p(k)} = p(k) - A_{p(k)}\left(A_{p(k)} - 1\right)\Big/2, \quad Y_{p(k)} = A_{p(k)} + 1,$$

где $ceil$ - функция округления до наибольшего целого.

План размещения пилот-сигналов представляет собой матрицу $\mathbf{C}$, состоящую из нулей и единиц, причем единицам соответствуют пилот-сигналы. Следует также учитывать, что ось Y направлена вниз и соответствует номеру строки матрицы $\mathbf{C}$, а ось X направлена вправо и соответствует номеру столбца матрицы $\mathbf{C}$.

Далее количество пилот-сигналов на диагонали увеличивается на 2 и процедура полного перебора для боковых пилот-сигналов повторяется. И так до тех пор, пока на диагонали не окажутся все пилот-сигналы, либо вся диагональ не будет заполнена пилот-сигналами.

Общее количество планов расстановки можно вычислить по следующей формуле

$$P_s = \sum_{d=1}^{N_d} \sum_{l_{d-2}=1}^{l_d} \cdots \sum_{l_{0(1)}=1}^{l_{2(3)}} \sum_{k_{s-1}=1}^{k_s} \cdots \sum_{k_1=1}^{k_2} \frac{k_1\left(k_1-1\right)}{2},$$

где s - количество подвижных пилот-сигналов, находящихся относительно диагонали на одной стороне квадранта, $k_s = k_{s-1} = \ldots = k_1 = \dfrac{n(n-1)}{2} - (s+1)$. При этом внутри квадранта находится $m_{1/4} = 2s + d$ пилот-сигналов, где d - количество диагональных пилот-сигналов.

Общее количество наборов пилот-сигналов, размещаемых на диагонали

$N_d = floor\left(n/4\right) + 1 - ceil\left(rem\left(m_{1/4}, 2\right)\right)$ при $m_{1/4} > n/2$;

$N_d = floor\left(m_{1/4}/2\right) + 1$ при $m_{1/4} \le n/2$,

где $ceil$ - функция округления до наибольшего целого, $floor$ - функция округления до наименьшего целого, $rem\left(a, b\right)$ - остаток от деления числа a на число b.

После этого выполняется процедура сокращения количества допустимых планов размещения пилот-сигналов путем введения дополнительных ограничений, заключающихся в том, что два пилот-сигнала могут находиться рядом только в диагональном направлении, но никак не в горизонтальном или вертикальном направлениях, т.е. одновременно должны выполняться неравенства $X_{p(i)} \ne X_{p(j)}$ и $Y_{p(i)} \ne Y_{p(j)}$. На следующем этапе осуществляется расчет дисперсий ошибки фильтрации для допустимых планов размещения $\mathbf{C}$ пилот-сигналов. Обозначим k-ю строку матрицы $\mathbf{C}$ как $\mathbf{S}_k$, а также введем матрицу $\mathbf{C}_k = \mathbf{S}_k \mathbf{E}$, где $\mathbf{E}$ - единичная матрица.

Алгоритм вычисления дисперсии ошибок оценивания СП включает в себя расчет ковариационной матрицы ошибок экстраполяции $\mathbf{P}_{Эk} = \rho^2 \mathbf{P}_{k-1} + \nu_k \nu_k^T$, ($\mathbf{P}_{Э1} = \mathbf{V}_X$) и ковариационной матрицы ошибок оценивания $\mathbf{P}_k = \dfrac{\mathbf{P}_{Эk}}{\mathbf{E} + \mathbf{C}_k^T \mathbf{V}_{\theta k}^{-1} \mathbf{C}_k \mathbf{P}_{Эk}}$, $\mathbf{V}_{\theta k} = \sigma_\theta^2 \mathbf{E}$ - диагональная матрица, $\mathbf{C}_k$ - диагональная матрица с k-й строкой матрицы $\mathbf{C}$ плана расстановки на главной диагонали.

Ковариационная матрица СП имеет вид

$\mathbf{V}_X = \rho^2 \mathbf{V}_X + \nu_k \nu_k^T$, откуда $\mathbf{V}_X \left(1 - \rho^2\right) = \nu_k \nu_k^T$, и разложив $\mathbf{V}_X$ на нижне- и верхнетреугольную матрицы $\mathbf{V}_{\Delta 1} \mathbf{V}_{\nabla 2} \left(1 - \rho^2\right) = \nu_k \nu_k^T$, получим

$\nu_k = \mathbf{V}_{\Delta 1} \sqrt{1 - \rho^2}$, $\nu_k^T = \mathbf{V}_{\nabla 2} \sqrt{1 - \rho^2}$, $\mathbf{V}_{\Delta 1} = \mathbf{V}_{\nabla 2}^T$, где $$\mathbf{V}_{\Delta 1} = \sigma_X \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ r & \sqrt{1-r^2} & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ r^2 & r\sqrt{1-r^2} & \sqrt{1-r^2} & 0 & \vdots & 0 \\ r^3 & r^2\sqrt{1-r^2} & r\sqrt{1-r^2} & \sqrt{1-r^2} & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots \\ r^{N-1} & r^{N-2}\sqrt{1-r^2} & r^{N-3}\sqrt{1-r^2} & r^{N-4}\sqrt{1-r^2} & \dots & \sqrt{1-r^2} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{V}_X = \sigma_X^2 \begin{bmatrix} 1 & r & r^2 & \dots & r^{N-1} \\ r & 1 & r & \dots & r^{N-2} \\ r^2 & r & 1 & \dots & r^{N-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r^{N-1} & r^{N-2} & r^{N-3} & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Для сглаживания оценок осуществляется обратный проход:

$$\mathbf{P}_N^* = \mathbf{P}_N, \quad \mathbf{P}_k^* = \mathbf{P}_k + \mathbf{A}_k \left(\mathbf{P}_{k+1}^* - \mathbf{P}_{Э(k+1)} \right) \mathbf{A}_k^T,$$

где $\mathbf{A}_k = \mathbf{P}_k \, \rho \, \mathbf{P}_{Э(k+1)}^{-1}$, $k = N, N-1, \dots, 1$.

На рис. 3.10 показаны конфигурации размещения пилот-сигналов: а – равномерная расстановка, б – оптимальная расстановка при $\rho = 0.995$ и $q = -10$ дБ, что позволяет подтвердить вывод, сделанный для одномерного случая: при сильной корреляции и сильных шумах при оптимальной расстановке пилот-сигналы «прижимаются» к краям дискретной сетки.

На рис. 3.11 сверху (а) показан график поверхности, соответствующей дисперсии ошибки интерполяции при оптимальной расстановке пилот-сигналов, снизу (б) – при регулярной расстановке.

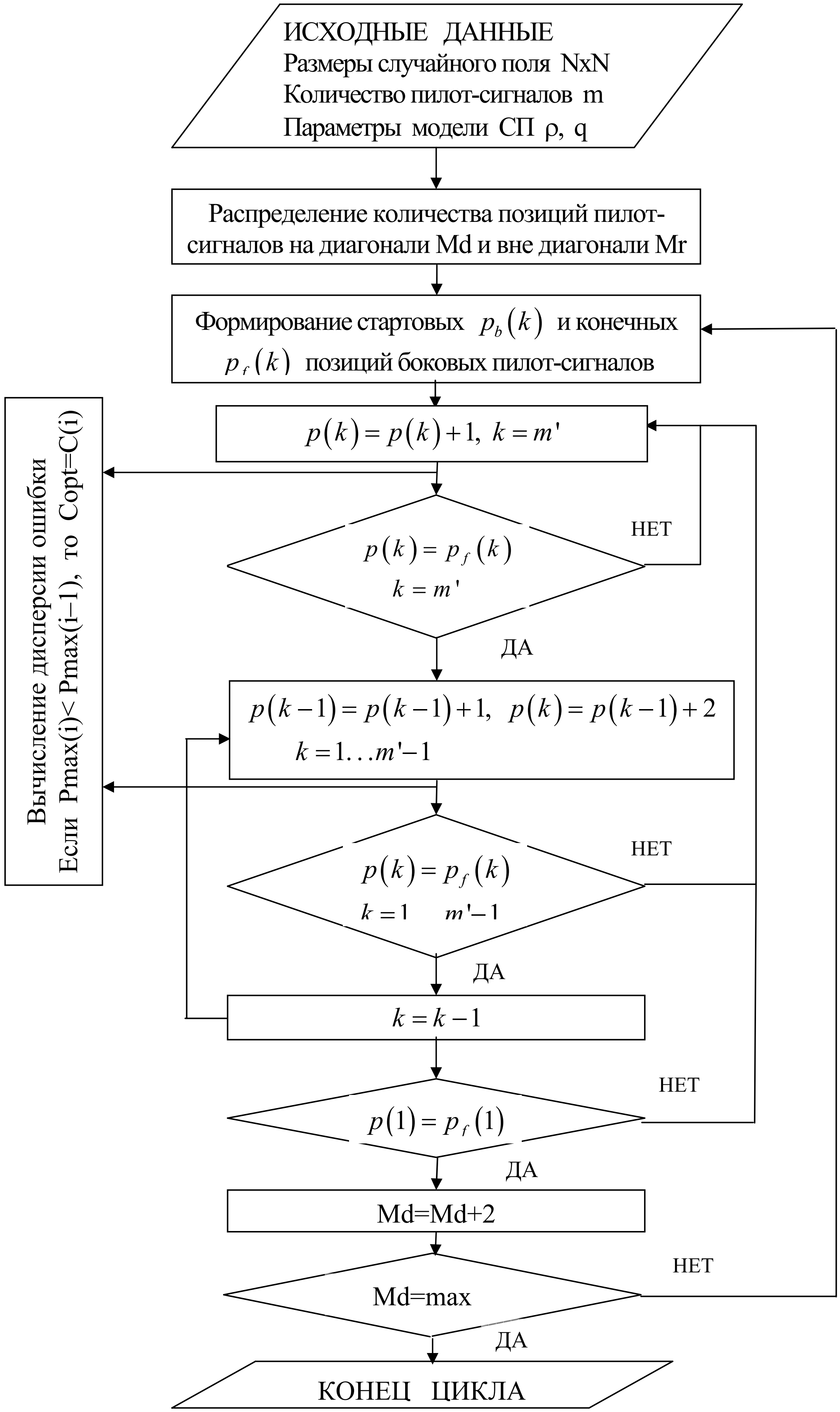

ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ
Размеры случайного поля NxN
Количество пилот-сигналов m
Параметры модели СП ρ, q
Распределение количества позиций пилот-сигналов на диагонали Md и вне диагонали Mr
Формирование стартовых $p_b(k)$ и конечных $p_f(k)$ позиций боковых пилот-сигналов
$p(k)=p(k)+1,\ k=m'$
Вычисление дисперсии ошибки
Если Pmax(i)< Pmax(i–1), то Copt=C(i)
$p(k)=p_f(k)$
$k=m'$
НЕТ
ДА
$p(k-1)=p(k-1)+1,\ \ p(k)=p(k-1)+2$
$k=1\ldots m'-1$
$p(k)=p_f(k)$
$k=1\quad m'-1$
НЕТ
ДА
$k=k-1$
$p(1)=p_f(1)$
НЕТ
ДА
Md=Md+2
Md=max
НЕТ
ДА
КОНЕЦ ЦИКЛА

Рис. 3.9

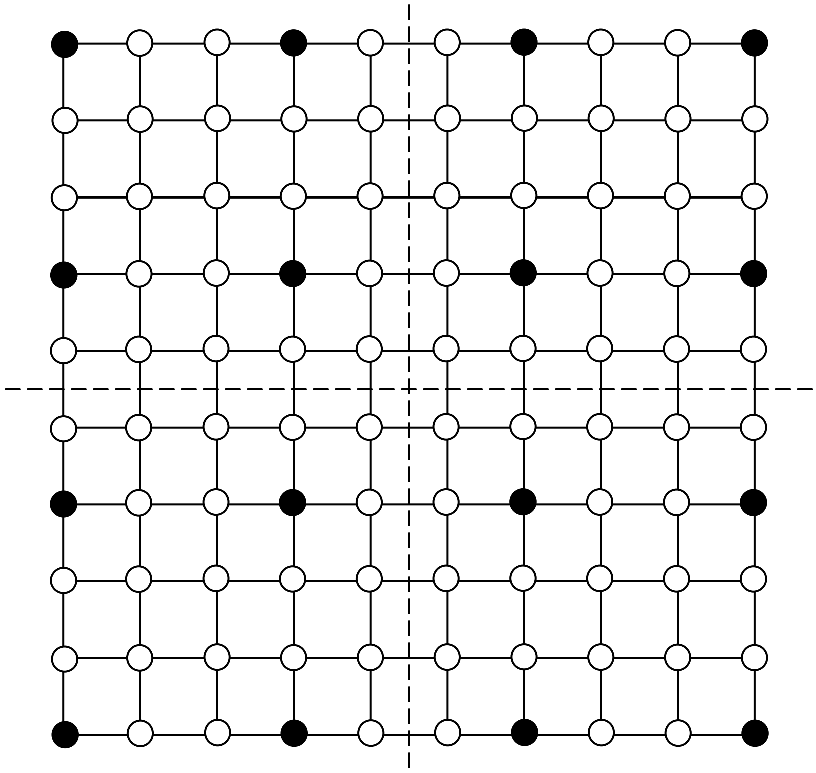


Рис. 3.10, а

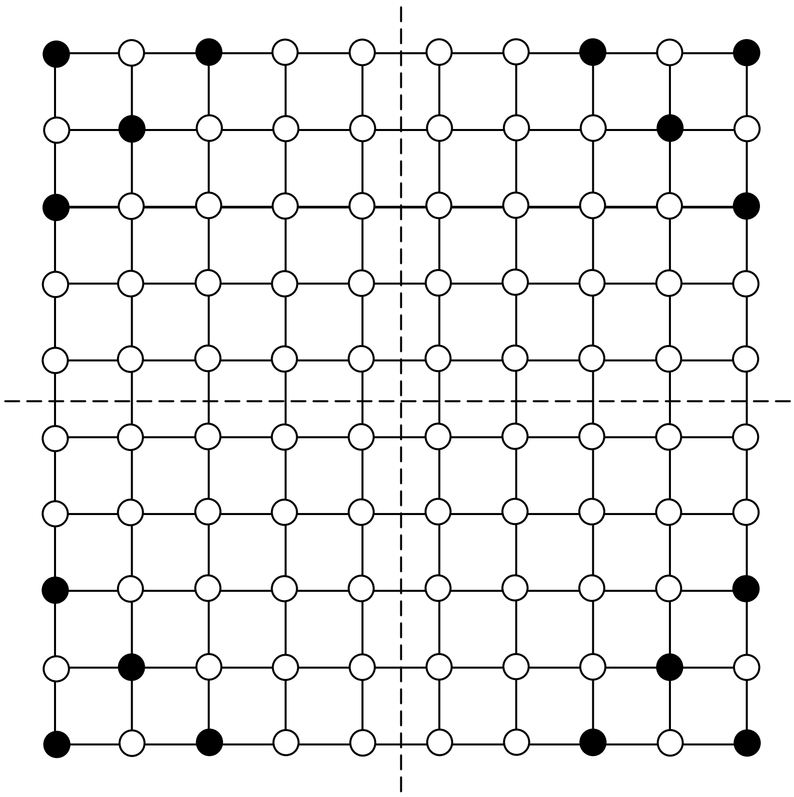
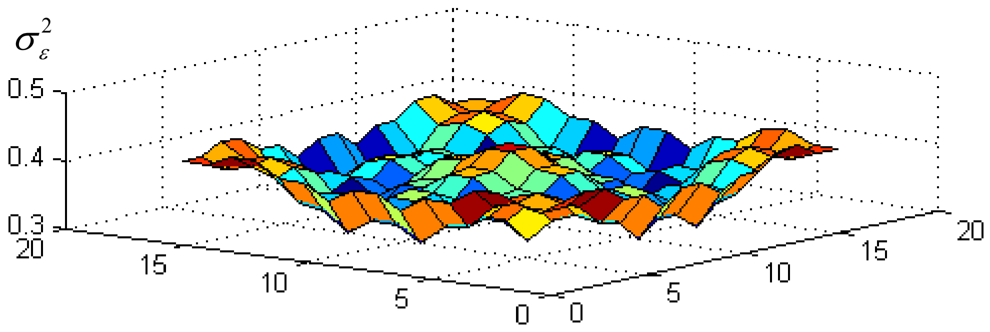
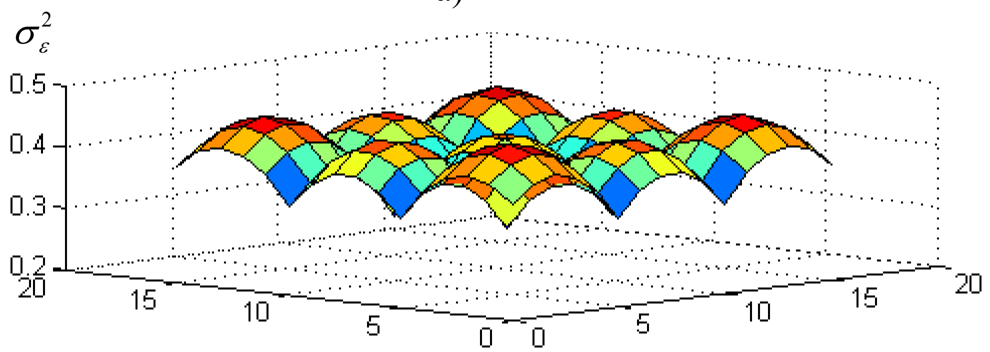


Рис. 3.10, б



а)



б)

Рис. 3.11

На рис. 3.12 (а, б) показаны зависимости снижения дисперсии ошибки интерполяции для оптимального плана размещения по сравнению с планом регулярной расстановки, аналогичные рис. 3.5-3.6. При этом на основании них можно сделать следующие выводы: при увеличении размеров двумерной сетки от 10x10 до 16x16 с сохранением того же количества пилот-сигналов m=16 максимально достижимый выигрыш существенно увеличивается (особенно при $q > 10$ дБ), а соответствующий этому выигрышу коэффициент корреляции уменьшается.

По аналогии со случаем последовательности отсчетов проведен анализ максимальной дисперсии ошибки интерполяции для оптимального плана расстановки пилот-сигналов $\sigma^2_{\varepsilon\,\max\,opt}$ на сетке заданных размеров $n \times n$ при изменении количества пилот-сигналов m_p, а также различных параметрах СП ρ и q.

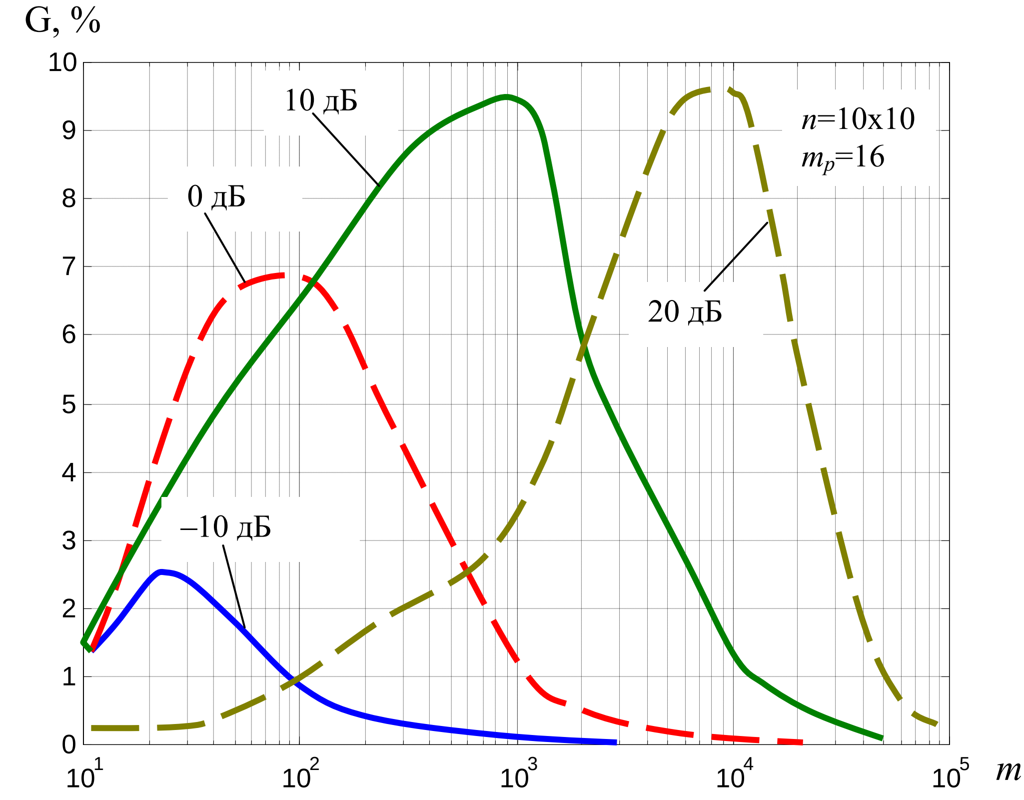


Рис. 3.12, а

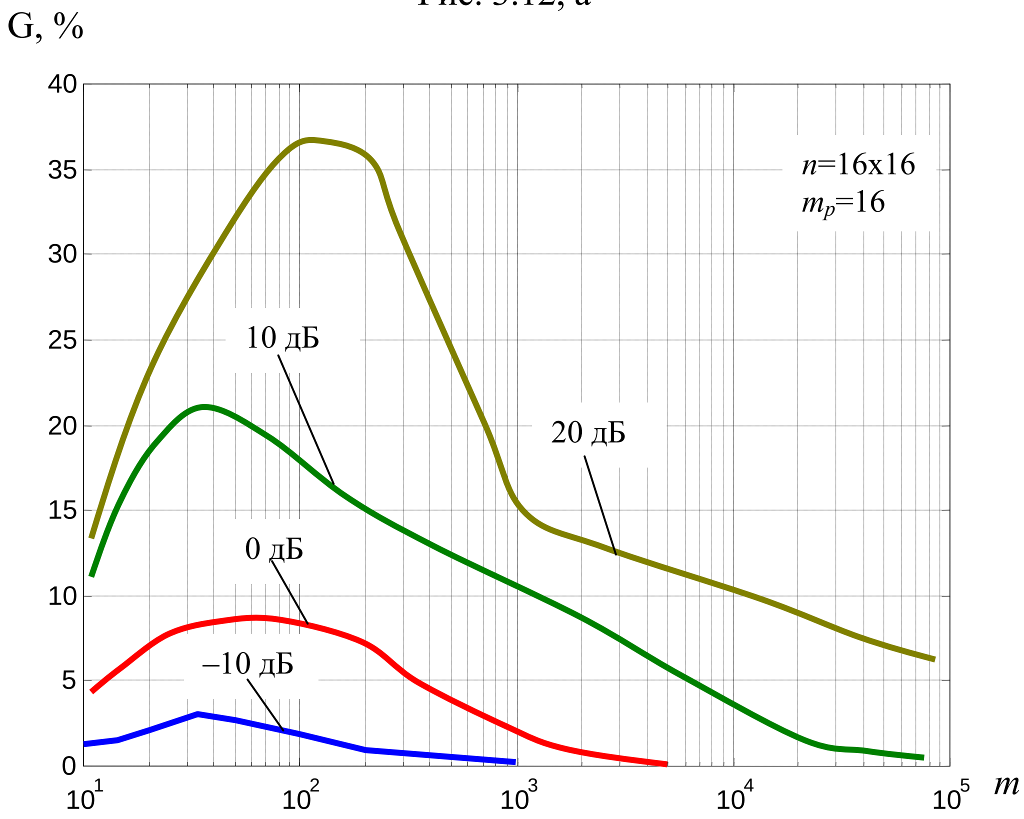


Рис. 3.12, б

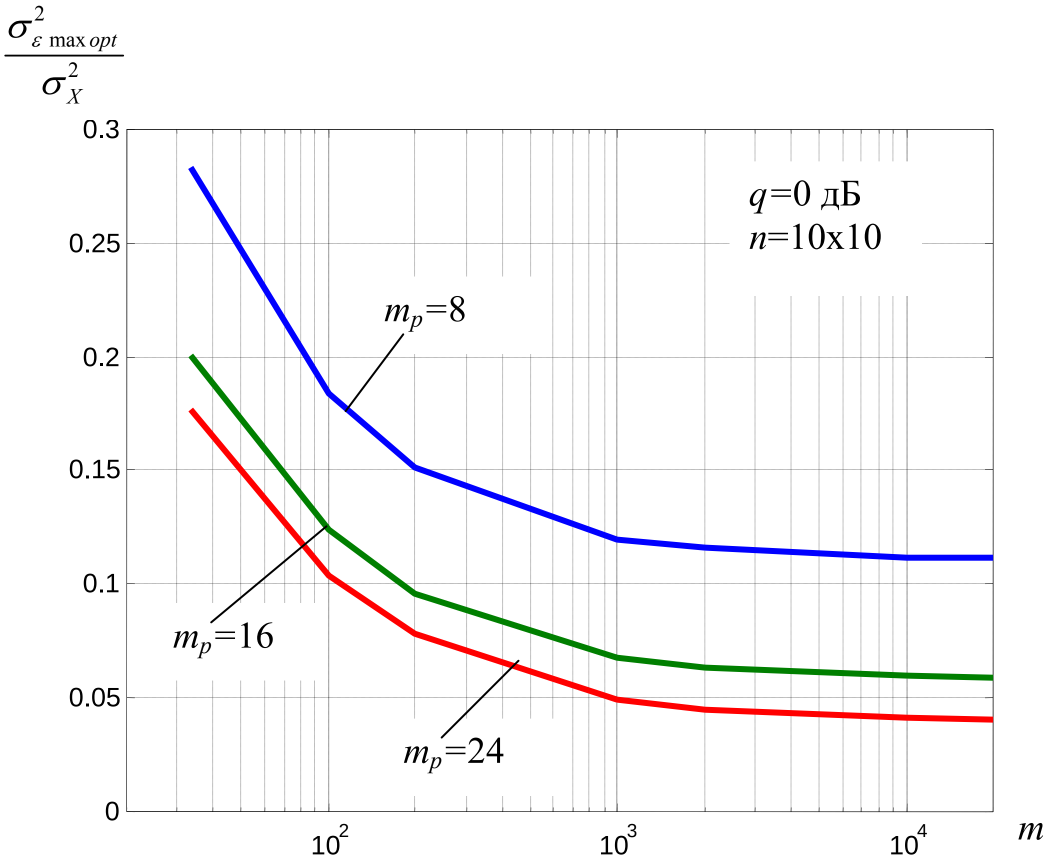


Рис. 3.13, а

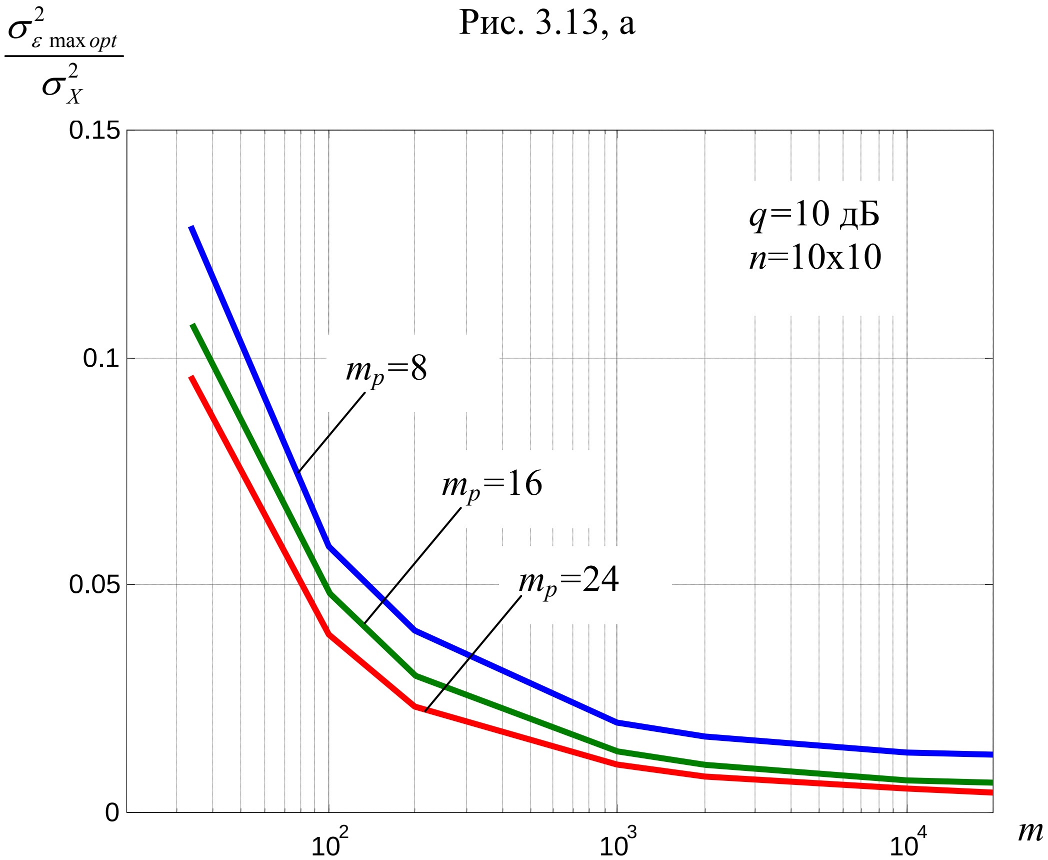


Рис. 3.13, б

На графиках рис. 3.13 изображены зависимости относительной максимальной дисперсии ошибки интерполяции $\sigma^2_{\varepsilon \max opt} / \sigma^2_X$ для оптимального плана от интервала корреляции $m = 1/(1-\rho)$ при различном количестве пилот-сигналов m_p для двумерной сетки размера 10x10. При этом показано, что приемлемое качество интерполяции достигается при малых шумах ($q \geq 10$ дБ) и корреляции $\rho > 0.97$, причем при сильных шумах ($q < 0$ дБ) приемлемого качества интерполяции можно достичь лишь при достаточно сильной корреляции $\rho > 0.995$ и большом количестве пилот-сигналов $m_p \geq n^2/5$. Кроме этого, на графиках можно наблюдать сходимость максимальной дисперсии ошибки интерполяции к некоторому асимптотическому значению при $m > 10^4$. При малых шумах ($q \geq 10$ дБ) при увеличении количества пилот-сигналов m_p с 8 до 24 дисперсия ошибки снижается в среднем на 1-3 %, в то время как при сильных шумах ($q < 0$ дБ) дисперсия ошибки снижается в среднем на 7-10 %.

3.4. Особенности программной реализации алгоритмов размещения пилот-сигналов

В пп. 3.2, 3.3 были решены задачи синтеза алгоритмов размещения пилот-сигналов на основе методов полного и улучшенного перебора. Предложенные алгоритмы позволяют получить оптимальные планы размещения датчиков в смысле минимума максимальной дисперсии ошибки интерполяции [17, 72, 73]. Вместе с тем, возникает необходимость разработки соответствующего комплекса программ, предназначенного для проведения научных исследований и позволяющего проводить исследования путем изменения соответствующих параметров с перспективой возможности модификации и доработки для решения специализированных задач. При этом практическое применение разработанных алгоритмов имеет ряд особенностей, связанных с объемом памяти ЭВМ и ограничениями по скорости выполнения операций.

Рассмотрим структуру разработанного комплекса программ для размещения пилот-сигналов на дискретной сетке. Комплекс состоит из двух программ (одно- и двумерный случаи расстановки пилот-сигналов), каждая из которых, в свою очередь, состоит из ряда подпрограмм, оформленных в виде функций и подпрограмм для формирования пользовательского интерфейса.

Интерфейс программ позволяет вводить основные параметры модели случайного поля: коэффициент корреляции ρ и ОСШ q (дБ); параметры дискретной сетки: в одномерном случае – количество отсчетов n последовательности и общее количество m пилот-сигналов, в двумерном случае – размеры поля $n \times n$ и количество пилот-сигналов $m_{1/4}$, размещаемых в одном квадранте. На рис. 3.14 изображена копия экрана интерфейса алгоритма размещения пилот-сигналов в одномерном случае, а на рис. 3.15 – для случая двумерной сетки. После нажатия соответствующей кнопки «Allocate» осуществляется поиск оптимального варианта размещения пилот-сигналов (рис. 3.14, 3.15). В конечном итоге получаются два графика дисперсии ошибки оценивания: верхний – для равномерной расстановки пилот-сигналов, нижний –

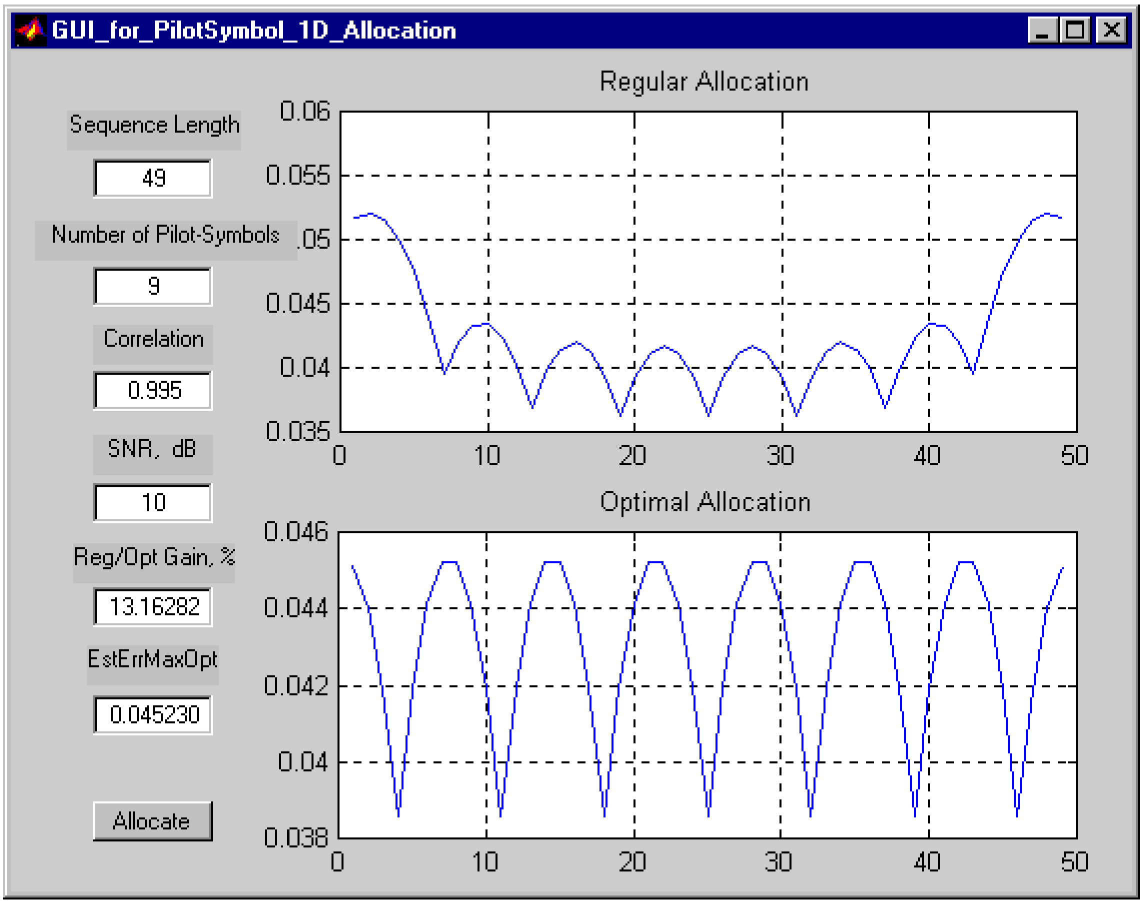


Рис. 3.14

для оптимальной расстановки (рис.3.14). На рис. 3.15 изображен интерфейс программы, позволяющей найти оптимальный план размещения пилот-сигналов в двумерном случае: верхний график – регулярная расстановка пилот-сигналов, нижний график – оптимальная расстановка.

Данные программы позволяют осуществлять следующие операции: вводить параметры модели сигнала и параметры сетки с заданными на ней пилот-сигналами, получать графики дисперсии ошибки оценивания и графики размещения пилот-сигналов на дискретной сетке, вычислять максимальную дисперсию ошибки для оптимального варианта размещения пилот-сигналов, а также вычислять выигрыш в максимальной дисперсии ошибки оценивания получаемый для оптимальной расстановки по сравнению с равномерной расстановкой.

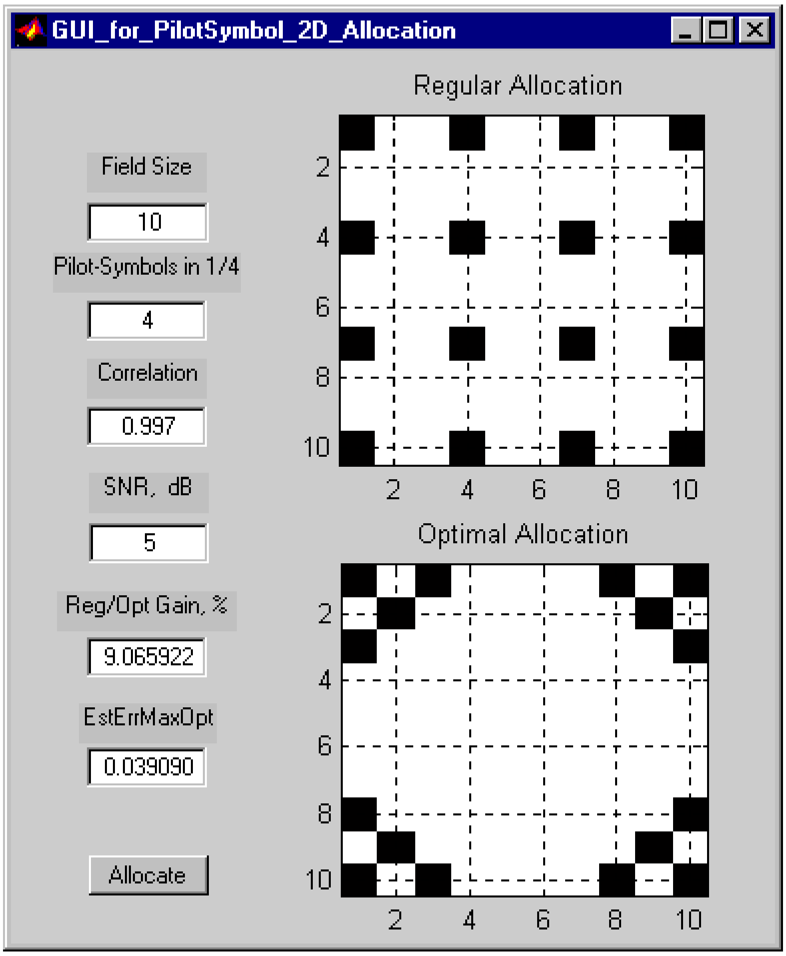


Рис. 3.15

Описываемый пакет программ разработан в среде MatLab 5.3 фирмы MathWorks Inc., работающей в операционных средах Windows и UNIX [31, 70]. Данный комплекс программ достаточно прост для понимания и может быть легко модифицирован для различных исследовательских задач.

Предложенные в диссертации алгоритмы размещения пилот-сигналов на основе методов полного и улучшенного перебора позволяют получать оптимальные планы размещения пилот-сигналов на дискретной сетке. Одним из возможных применений данных алгоритмов являются устройства оценивания параметров канала связи в многочастотных системах связи с ортогональным частотным мультиплексированием (OFDM), в которых при оценивании фазовых искажений в канале связи на краях частотного диапазона имеют место значительные ошибки оценивания за счет «краевого эффекта» при оптимальной линейной фильтрации [119, 122].

Другим возможным применением алгоритмов размещения могут служить пространственные апертуры датчиков в различных измерительных системах, где зачастую возникает необходимость снижения максимальной дисперсии ошибки оценивания путем надлежащего позиционирования соответствующих датчиков (измерителей).

Перспективным направлением дальнейших исследований является синтез градиентных алгоритмов поиска оптимального плана размещения пилот-сигналов. Такие алгоритмы позволили бы существенно снизить вычислительные затраты.

3.5. Выводы

1. Впервые решена задача оптимизации размещения датчиков (измерителей, пилот-сигналов) на дискретной сетке отсчетов с целью нахождения плана размещения датчиков с наименьшей максимальной дисперсией ошибки интерполяции. Разработаны алгоритмы поиска оптимального плана размещения датчиков на одно- и двумерной дискретных сетках.

2. Разработаны алгоритмы поиска оптимального плана размещения датчиков на одно- и двумерной дискретных сетках. Показано, что метод улучшенного перебора позволяет существенно снизить вычислительные затраты, связанные с поиском оптимального плана размещения датчиков.

3. Получены зависимости выигрыша в максимальной дисперсии ошибки интерполяции, который при слабых шумах $q > 10$ дБ и сильной корреляции $0.995 < \rho < 0.9995$ за счет оптимизации размещения датчиков достигает 20-30 %. Даны рекомендации по выбору количества размещаемых датчиков на сетке заданных размеров в зависимости от требуемого качества интерполяции при различных параметрах СП.

4. В результате анализа графических зависимостей максимальной дисперсии ошибки интерполяции для оптимального плана расстановки пилот-сигналов показано, что приемлемое качество интерполяции $\sigma^2_{\varepsilon \max opt} / \sigma^2_X < 0.1$ достигается при малых шумах $q \geq 10$ дБ и сильной корреляции $\rho > 0.99$.

5. Разработан комплекс программ, позволяющий осуществлять поиск оптимального плана размещения пилот-сигналов на одно- и двумерной сетке при различных параметрах сигнала, размерах дискретной сетки, количестве пилот-сигналов. Реализованные программные пакеты в среде MatLab имеют простую структуру и могут быть изменены для решения различных прикладных задач.

ГЛАВА 4. ПРИМЕНЕНИЯ АЛГОРИТМОВ ИНТЕРПОЛЯЦИИ И ОПТИМИЗАЦИИ РАЗМЕЩЕНИЯ ПИЛОТ-СИГНАЛОВ

4.1. Постановка задачи

Последние достижения в области проектирования перспективных мобильных систем связи привели к разработке многочастотных систем с ортогональным частотным мультиплексированием (OFDM). В подобных системах существует проблема оценивания комплексного коэффициента передачи канала связи и одним из основных средств для ее решения являются пилот-сигналы, вставляемые в кадр передаваемых данных наряду с информационными символами. В настоящее время нерешенной осталась задача оптимального позиционирования заданного количества пилот-сигналов на плоскости время-частота. Кроме этого, актуальной остается выработка рекомендаций, связанных с выбором количества пилот-сигналов, необходимого для обеспечения заданной помехоустойчивости системы связи. В связи с этим в пп. 4.2, 4.3 рассмотрены возможности применения результатов анализа методов интерполяции, полученных во 2-й главе диссертационной работы.

Другим важным направлением является разработка методов сокращения избыточности при передаче многомерных изображений по каналам связи. При этом весьма важными представляются проблемы, связанные с оптимальной (в общем случае – неравномерной) дискретизацией изображений и их последующей интерполяцией. В п. 4.4 рассмотрено применение результатов, полученных в диссертационной работе, для восстановления кодированных изображений.

4.2. Применения методов интерполяции при проектировании многочастотных систем связи с OFDM

За последние годы появилось много работ, посвященных разработке и оптимизации алгоритмов оценивания параметров каналов связи, применяемых при проектировании многочастотных цифровых систем мобильной связи 4 поколения. Концепция ортогонального частотного разделения с мультиплексированием (OFDM – Orthogonal Frequency Division Multiplexing) [22, 99, 103] представляет собой специальный случай одновременной передачи потока цифровых данных по многим частотным каналам (со многими несущими колебаниями). Новая технология передачи в настоящее время рассматривается как одна из наиболее перспективных для построения широкополосных систем цифровой радиосвязи по многолучевым каналам, обеспечивающая достаточно высокую спектральную эффективность этих систем. Одним из привлекательных свойств данной технологии является относительно высокая устойчивость по отношению к частотно-селективным замираниям и узкополосным помехам. В системах с одним несущим колебанием, замирания на данной частоте или узкополосная помеха, попадающая на эту частоту, могут полностью прервать передачу данных. В многочастотных системах в аналогичных условиях оказываются подавленными лишь незначительная часть поднесущих колебаний. Помехоустойчивое кодирование может обеспечить восстановление данных, потерянных на подавленных поднесущих.

При OFDM высокоскоростной поток данных разбивается на большое число низкоскоростных потоков, каждый из которых передается в своем частотном канале (на своей поднесущей частоте), т.е. в частотных каналах длительность канальных символов может быть выбрана достаточно большой, значительно превышающей время задержки сигнала в канале, что позволяет эффективно бороться с межсимвольной интерференцией (МСИ). Высокая спектральная эффективность обеспечивается достаточно близким расположением частот соседних поднесущих колебаний, которые генерируются совместно так, чтобы сигналы всех поднесущих были ортогональны. Это достигается благодаря применению быстрого преобразования Фурье (БПФ) [132].

Рассмотрим последовательность данных $d_0, d_1, d_2, ..., d_{N-1}$, где каждый отсчет d_n – комплексный символ (рис. 4.1). Данные могут являться выходом комплексного цифрового модулятора, например, QAM, PSK и т.п. Предположим, что мы осуществляем обратное ДПФ на последовательности $2d_n$ (множитель 2 используется исключительно для масштабных целей), и получаем в результате N комплексных чисел $S_m\,(m=0,1,...,N-1)$ в виде:

$$S_m = 2\sum_{n=0}^{N-1} d_n \; exp\left(j2\pi\frac{nm}{N}\right) = 2\sum_{n=0}^{N-1} d_n \; exp(j2\pi f_n t_m) \quad [m=0,1,...,N-1], \tag{4.1}$$

где $f_n = \dfrac{n}{NT_s}$ и $t_m = mT_S$; (4.2)

T_s - длительность одного символа. Пропуская действительную часть последовательности символов представленной уравнением (4.1) через НЧ-фильтр, получаем сигнал

$$y(t) = 2\,Re\left\{ \sum_{n=0}^{N-1} d_n \; exp\left(j2\pi\frac{n}{T}t\right)\right\}, \quad 0 \le t \le T, \tag{4.3}$$

где $T = NT_s$. Сигнал $y(t)$ представляет групповой спектр сигнала OFDM. Из формулы (4.3) следует, что длина сигнала OFDM равна T, разнесение несущих равно $1/T$, скорость передачи символа OFDM в N раз больше чем исходная скорость передачи в бодах, в системе имеются N ортогональных поднесущих.

В OFDM доступный спектральный диапазон разбивается на N каналов, являющихся ортогональными за счёт использования несущих с интервалом разнесения зависящим от скорости передачи данных [122]. Двоичное сообщение кодируется и из него формируется последовательность комплексных символов данных, которые разбиваются на фреймы по N символов.

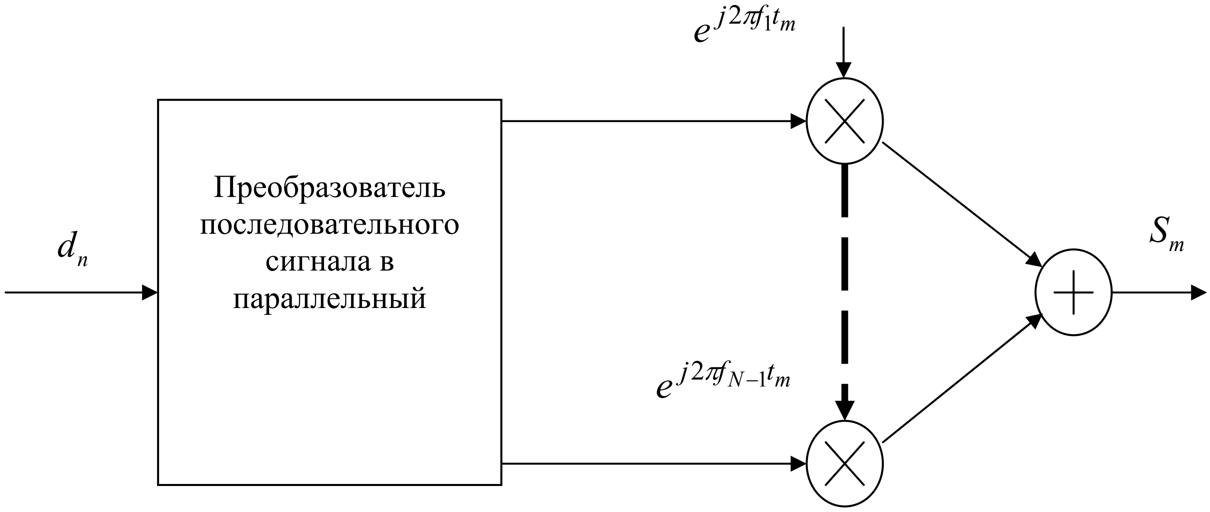


Рис. 4.1

Технология OFDM в настоящее время используется в широкополосных цифровых системах передачи данных подвижным абонентам, высокоскоростных цифровых линиях передачи со скоростями от 1.6 до 100 Мбит/с, в цифровом радиовещании и телевидении. Основными достоинствами OFDM считаются следующие:

– относительно медленно изменяющиеся во времени передаточные функции каналов связи, которые можно считать постоянными на интервале времени передачи одного блока данных, что позволяет значительно увеличить пропускную способность посредством адаптации скорости передачи на каждой поднесущей в соответствии со значением отношения сигнал/помеха в этом частотном канале (при больших значениях отношения можно увеличивать число бит, переносимых одним элементарным символом);

– при фиксированном значении расширения задержки сложность реализации оказывается значительно ниже сложности аналогичных одночастотных систем с эквалайзером [22, 122].

С другой стороны, данной технологии присущи и некоторые недостатки:

– высокая чувствительность к смещению частоты (доплеровским сдвигам несущих) и флуктуациям фазы принимаемого сигнала относительно опорного гармонического колебания приемника [133];

– относительно высокое значение пиковой мощности радиосигнала к её среднему значению, что заметно снижает энергетическую эффективность радиопередатчиков.

Оценивание параметров канала связи с помощью пилот-сигналов. При проектировании устройств оценки параметров канала для систем с OFDM возникают две основные проблемы. Первая проблема касается выбора способа передачи пилот-информации. Пилот-информация необходима для оценивания комплексных передаточных функций каналов связи. Вторая проблема состоит в проектировании устройства оценки небольшой сложности, способного качественно отслеживать изменения параметров канала. Эти две проблемы взаимосвязаны, так как функционирование устройства оценки зависит от того, каким образом передается пилот-информация.

Эффективным способом получения непрерывно изменяющейся оценки является передача пилот-сигналов вместо данных на определенных позициях время-частотной сетки OFDM (рис. 4.2), где t_m, f_n - параметры, определяемые по формуле (4.2).

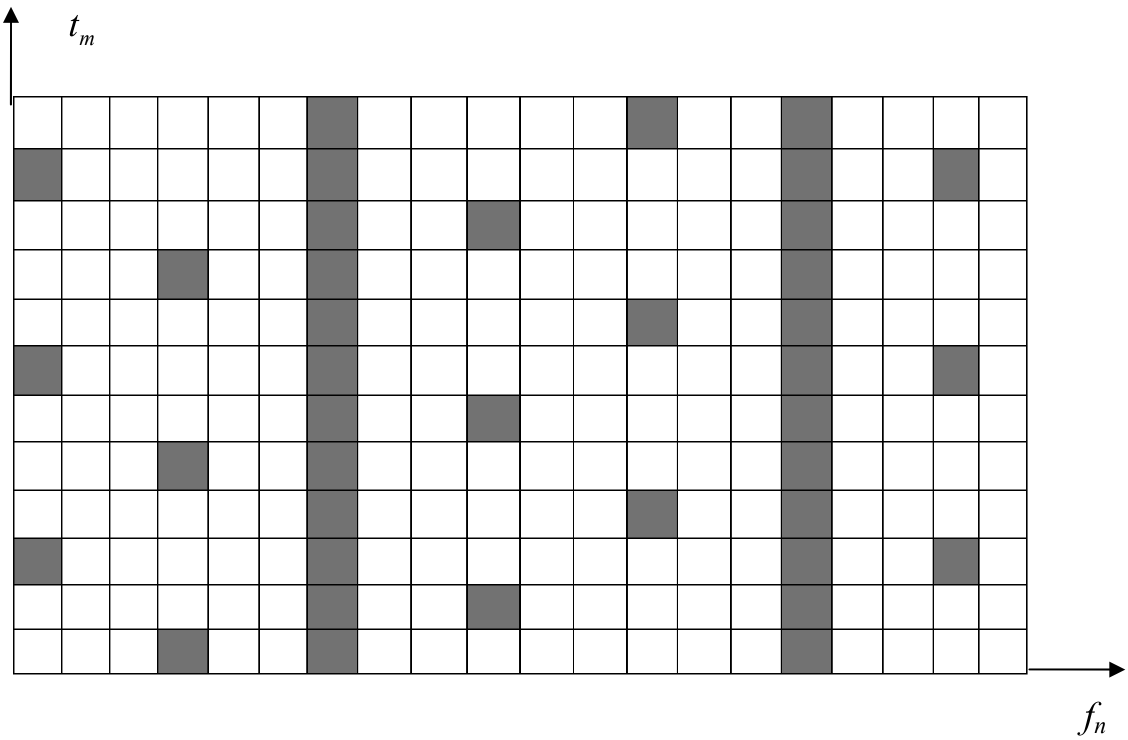


Рис. 4.2

При этом осуществляется оценивание искажений комплексных амплитуд несущих на плоскости время-частота с целью дальнейшей их компенсации на приемной стороне, для чего используются пилот-сигналы с известной амплитудой и фазой, которые вставляются в кадр передаваемых данных [96, 98, 112]. Неполные наблюдения, рассмотренные в п. 1.3 как раз и будут соответствовать позициям пилот-сигналов. Таким образом, данная задача может быть представлена как задача интерполяции двумерного СП, заданного на прямоугольной дискретной сетке, содержащей N узлов по наблюдениям в M узлах, т.е. как задача восстановления СП по неполным наблюдениям.

На рис. 4.2 показан пример расположения непрерывных и распределенных пилот-сигналов. В предварительном проекте стандарта Европейского телевидения DVB пилот-информация должна передаваться на усиленных поднесущих как на распределенных, так и на непрерывных несущих [122]. Усиленные поднесущие означают, что пилот-информация передается с более высокой мощностью нежели информационные данные.

В целом канал с замираниями может быть представлен как двумерный сигнал (время-частота) отсчеты которого распределены по позициям пилот-сигналов и компоненты передаточной функции канала между пилот-сигналами оцениваются путем интерполяции.

Проектирование устройства оценивания параметров канала. Предполагая, что сетка распределения пилот-сигналов задана, оптимальным линейным алгоритмом оценивания в смысле минимума среднеквадратической ошибки (СКО) будет двумерный фильтр Винера [109]. Такой алгоритм может быть спроектирован при помощи стандартных методов [104, 108, 121], на основе известных вероятностных свойств канала. Сочетание высокоскоростных данных и низкой частоты появления однобитовых ошибок требует использования устройств оценивания обладающих небольшой сложностью и высокой точностью. Эти два ограничения на устройство оценивания (УО) противоречивы. Большинство УО с высокой точностью, такие как двумерный фильтр Винера [109, 112], требуют больших вычислительных затрат, тогда как УО с малой сложностью характеризуются менее точными оценками.

Проблема снижения вычислительных затрат при сохранении качества рассмотрена в работах [101, 108, 111, 127]. В статье [111] вместо одного двумерного КИХ-фильтра применены составные фильтры. Использование составных фильтров вместо полных двумерных фильтров является стандартным методом, используемым для снижения вычислительных затрат в многомерной обработке сигналов [27]. При использовании этого метода оценивание сначала выполняется в направлении частот с использованием одномерного КИХ-фильтра, а затем во временном направлении при помощи второго одномерного КИХ-фильтра. Это ограничивает достижимые двумерные импульсные характеристики в пределах тех, которые являются внешним произведением двух одномерных фильтров. Такое ограничение приводит к незначительному снижению качества для весьма ограниченного класса моделей, но простота технической реализации часто оправдывает использование составных фильтров [108, 111].

Второй подход к снижению вычислительных затрат основан на использовании преобразований, которые отражают мощность в канале в виде нескольких коэффициентов, позволяя таким образом эффективно оценивать параметры канала с небольшими затратами в параметрической области. В ряде работ предложены УО малой сложности такого типа основанные как на ДПФ [122], так и на заданном снижении требуемой скорости вычислений [108].

Для устранения эффекта МСИ в частотно-селективных каналах используется циклическая вставка длины N_c. Если предположить, что импульсная характеристика канала неизменна во времени внутри каждого символа OFDM и изменяется при переходе от одного символа OFDM к другому, то модель системы можно представить в следующей форме [112]

$$Y(k,m)=E'\cdot F(k,m)\cdot D(k,m)+Z(k,m),$$
$$k=0,1,\dots,N_f, \quad m=0,1,\dots,\infty \qquad (4.4)$$

где $Y(k,m)$– принятый отсчет на k-м выходе блока ДПФ на m-м временном интервале, $F(k,m)=\sum_{l=0}^{L} f_l(m)\cdot e^{j2\pi kl/N_f}$, $k=0,1,...,N_f-1$ - ДПФ импульсной характеристики канала, $D(k,m)$– символ BPSK передаваемый на частоте k и во временном интервале m и $Z(k,m)$ – аддитивный белый гауссовский шум со спектральной плотностью мощности N_0. Символы MPSK принимают значения $D(k,m)=\pm 1$. Параметр E' в формуле (4.4) представляет собой энергию, приходящуюся на один бит после удаления циклической вставки. Соотношение между E' и полной энергией E_b на передаваемый бит выражается как $E'=E_b N_f / (N_f+N_c)$. Параметры $f_l(m), l=0,1,...,L$ являются изменяющимися во времени коэффициентами рэлеевских замираний, характеризующими импульсную характеристику канала. Переменная решения, из которой получается передаваемый символ BPSK, имеет вид

$$\tilde{D}(k,m) = \mathrm{Re}\left[Y(k,m)\hat{F}(k,m)\right] = \mathbf{z}^T\,\mathbf{Q}\,\mathbf{z}^*, \tag{4.5}$$

где $\hat{F}(k,m)$– оценка передаточной функции канала $F(k,m)$, $\mathbf{z}=\left[Y(k,m)\hat{F}(k,m)\right]^T$ и $\mathbf{Q}=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}$.

Двумерный винеровский интерполятор. Передаточная функция канала оценивается при помощи двумерного винеровского интерполятора. Определим два дополнительных параметра N_{ef} и N_{et}, являющихся длиной интерполятора по частоте и по времени, соответственно. Таким образом, размер интерполятора равен $N_p=N_{ef}\cdot N_{et}$. Оценка $\hat{F}(k,m)$ передаточной функции канала $F(k,m)$ равна

$$\hat{F}(k,m) = \sum_{p=1}^{N_p} a_p(k,m)Y(k_p,m_p), \tag{4.6}$$

где $a_p(k,m), p=1,2,..., N_{et}N_{ef}$ - коэффициенты интерполяции для принятой выборки $Y(k,m)$, $Y(k_p,m_p)$ - p-й принятый пилот-сигнал, используемый для оценивания параметров канала (ОПК) в отношении $Y(k,m)$. Пилот-сигналы, используемые для ОПК в отношении $Y(k,m)$ расположены ближе всего к отсчету $Y(k,m)$ в частотно-временной области. В уравнении (4.6) без потери общности предполагается, что все передаваемые пилот-сигналы имеют амплитуду $D(k_p, m_p)=1$. Коэффициенты двумерного винеровского интерполятора для принятого отсчета данных $Y(k,m)$ вычисляются из уравнения Винера-Хопфа [1]

$$\mathbf{R}_{pp} \cdot \mathbf{a}(k,m)=\mathbf{R}_{dp}(k,m), \tag{4.7}$$

где $\mathbf{R}_{pp}$ автоковариационная матрица вектора принятой выборки пилот-сигналов $\mathbf{Y}_p = \left[Y(k_1, m_1), Y(k_2, m_2)\ldots Y\left(k_{N_p}, m_{N_p}\right)\right]^T$; $\mathbf{a}(k,m)$ - вектор-столбец, включающий коэффициенты интерполяции для принятого отсчета данных $Y(k,m)$; $\mathbf{R}_{dp}(k,m)$ - вектор взаимной ковариации между отсчетом данных $Y'(k,m)=Y(k,m)\,D^*(k,m)$ и принятым вектором выборки пилот-сигналов Y_p. Матрица $\mathbf{R}_{pp}=\{r_{pp}(i,j), i, j=1,2,...,N_{et}N_{ef}\}$ имеет размерность $N_p \times N_p$ с элементами

$$r_{pp}(i,j)=\begin{cases} R_F(0,0)+N_0/E', i=j, \\ R_F\left(k_i-k_j, m_i-m_j\right), i\neq j, \end{cases} \tag{4.8}$$

где E'/N_0 – ОСШ для переданного бита после удаления циклической вставки и

$$R_F(\Delta k, \Delta m)=\sum_{l=0}^{L} R_l(\Delta m)\cdot e^{j2\pi l \Delta k/N_f} \quad . \tag{4.9}$$

В уравнении (4.9) $R_l(\Delta m)$ – автокорреляционная функция l-го канального коэффициента $f_l(m)$. Предполагается, что канальные коэффициенты взаимно некоррелированы. Вектор-столбец $R_{dp}(k,m)=\{r_{dp}(j), j=1,2,...,N_{et}N_{ef}\}$ в уравнении (4.7) имеет элементы $r_{dp}(j)=R_F\left(k-k_j, m-m_j\right)$, где $R_F(\Delta k, \Delta m)$ определяется в уравнении (4.9).

Основной принцип ОПК при помощи пилот-сигналов заключается в уплотнении обучающих символов, известных на входе приемника, в поток данных. Следовательно, приемник способен оценить параметры канала в любой момент времени при наличии наблюдений на позициях пилот-сигналов и в предположении, что скорость отсчетов является достаточной для данной полосы частот канала. Одними из последних достижений за рубежом в этой области является разработка алгоритмов измерения текущего состояния канала связи с помощью фильтра Калмана [101, 121, 127], а также синтез модели системы связи с адаптивным планом размещения пилот-сигналов [128]. Данные алгоритмы позволяют существенно снизить вычислительные затраты при фильтрации СП амплитудно-фазовых искажений.

В работе [119] рассмотрен сравнительный анализ двух алгоритмов оценивания параметров канала: оценивание по методу максимального правдоподобия и оценивание по минимуму среднеквадратической ошибки. Показано, что преимуществом первого из вышеупомянутых метода является отсутствие необходимости знания априорной статистики канала и ОСШ, в то время как второй метод дает более высокую точность оценивания и работает лучше при малых ОСШ, хотя и требует априорную информацию о статистике канала.

4.3. Авторегрессионные модели замираний в многолучевом канале связи

Типичный мобильный радиоканал подвергается действию сильных замираний за счет многолучевого распространения, и это приводит к повышению вероятности ошибки при приеме [10, 24, 32]. В системах с OFDM, имеющих большую длительность символов, поскольку сигналы имеют малую скорость потока, канал может рассматриваться как гладкий по частоте. Это имеет место, когда полоса когерентности канала больше скорости передачи символов. Но реальный канал селективен по частоте и системы с OFDM проявляют эффект разнесения в канале, селективном по частоте. Это является основным преимуществом при использовании систем с OFDM в условиях многолучевых замираний. Кроме этого, за счет перемещения абонента возникает доплеровское смещение несущих колебаний, нарушающее ортогональность несущих и, следовательно, снижающее эффективность системы связи. Максимальная доплеровская частота определяется как $f_{d,\max} = f_c v/c$, где f_c - несущая частота (Гц), v - максимальная скорость передвижения приемника и c - скорость света. Обычно предполагается изотропное рассеяние, т.е. мощность принятого сигнала равномерно распределяется между всеми углами прихода лучей, что имеет результатом U-образный доплеровский спектр, который обычно называют спектром Джейкса [68].

В работах [22, 68, 122] рассмотрены соответствующие математические модели замираний в многолучевом канале связи в виде КФ, полученные на основе экспериментальных данных.

Во временной области – это так называемая модель Джейкса [68] в виде функции Бесселя первого рода нулевого порядка $J_0(\ldots)$

$$B_t(\tau) = \sigma^2 J_0(2\pi F_D \tau), \tag{4.10}$$

где F_D - частота доплеровского сдвига (Гц).

В частотной области в качестве исходной была выбрана модель многолучевого канала связи рекомендованная Международным союзом электросвязи ITU (International Telecommunication Union) (табл. 4.1) [111]. При этом КФ характеризует временное рассеяние в канале связи и имеет вид суммы экспонент, которые соответствуют лучам в канале

$$B_f\left(\Delta f\right)=\sum_{m=1}^{L}\sigma_m^2\exp\left(-j\,2\pi\,\Delta f\,\tau_m\right), \tag{4.11}$$

где L - количество лучей в канале, Δf - ширина полосы частот передаваемого сигнала, τ_m - запаздывание во времени m-го луча.

Таким образом, дискретная КФ огибающей сигнала на выходе подобного канала может быть представлена в виде

$$R\left(\Delta n,\Delta k\right)=J_0\left(2\pi\,f_d\,\Delta n T_s\right)\sum_{m=1}^{L}\sigma_m^2 e^{-j\,2\pi\,\Delta k\,f_s\tau_m}\,, \tag{4.12}$$

где f_d - частота доплеровского сдвига; T_s - длительность символа OFDM; τ_m - задержка m-го луча; f_s - ширина полосы одной частоты (поднесущей); $J_0\left(x\right)$ - функция Бесселя 1-го рода нулевого порядка; $\Delta n, \Delta k$ - соответствующие интервалы дискретизации.

В силу того, что модель СП с подобной КФ затруднительно использовать при реализации оптимальных алгоритмов обработки сигналов в диссертации предлагается использовать временные ряды, позволяющие моделировать случайные процессы с заданными корреляционными свойствами. В связи с этим появляется возможность аппроксимировать выражения (4.10) и (4.11) посредством уравнений авторегрессии, а выражение (4.12) – двумерной авторегрессионной моделью с разделимой КФ, которая позволяет синтезировать квазиоптимальный алгоритм фильтрации принимаемых сигналов.

Методика имитации замираний посредством авторегрессионных уравнений n-го порядка включает в себя следующие шаги:

1) задаются коэффициенты корреляции $\rho_1, \ldots, \rho_n$, равные значениям реальной КФ (например, (4.10) или (4.11)) в соответствующих начальных точках и являющиеся начальными для уравнения авторегрессии;

2) решается система уравнений Юла-Уокера, из которой находятся соответствующие коэффициенты $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ уравнения авторегрессии n-го порядка [7]

$$\begin{array}{l} \rho_1 = \varphi_1 \quad + \varphi_2\rho_1 + \ldots + \varphi_n\rho_{n-1} \\ \rho_2 = \varphi_1\rho_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n\rho_{n-2} \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \ldots \qquad \vdots \\ \rho_n = \varphi_1\rho_{n-1} + \varphi_2\rho_{n-2} + \ldots + \varphi_n \end{array};$$

3) осуществляется проверка стационарности соответствующего временного ряда с КФ

$$\rho_k = \varphi_1\rho_{k-1} + \varphi_2\rho_{k-2} + \ldots + \varphi_n\rho_{k-n}, \; k > 0$$

и общим решением

$$\rho_k = A_1G_1^k + A_2G_2^k + \ldots + A_nG_n^k,$$

где $G_1^{-1}, G_2^{-1}, \ldots, G_n^{-1}$ - корни характеристического уравнения

$$\varphi(B) = 1 - \varphi_1 B - \varphi_2 B^2 - \ldots - \varphi_n B^n = 0.$$

Стационарность требует, чтобы $|G_i| < 1$. Если это условие не выполняется, то необходима либо коррекция соответствующих начальных значений $\rho_1, \ldots, \rho_n$, либо введение ограничений на количество отсчетов имитируемого процесса для обеспечения его устойчивости, что является недостатком данной методики при имитации случайных процессов с КФ сложной формы посредством авторегрессионных моделей высокого порядка. Однако при этом появляется возможность с высокой точностью аппроксимировать КФ сложной формы.

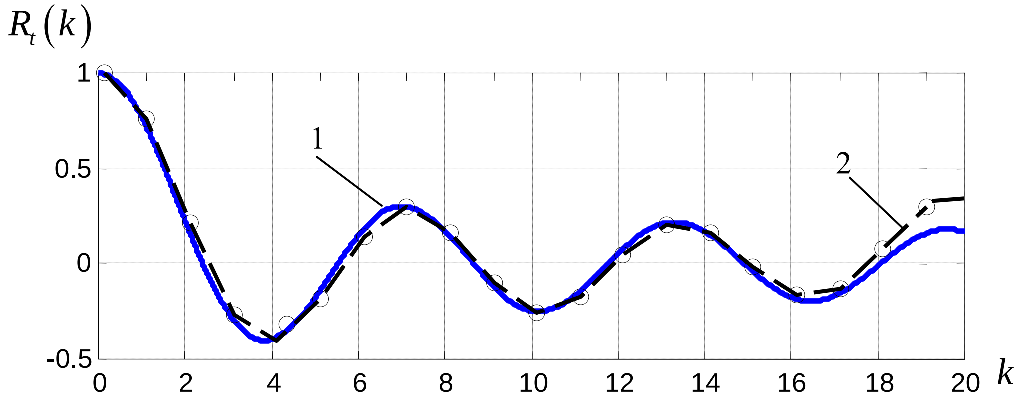


Рис. 4.3

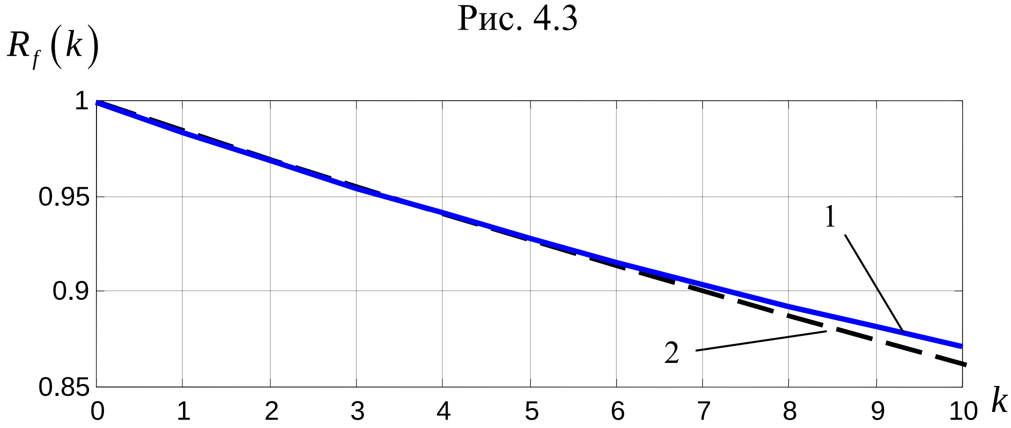


Рис. 4.4

При имитации длительных временных отрезков с замираниями ($T_a \gg 1$ мс) необходимо учитывать дополнительные «лепестки» КФ, заданной функцией Бесселя $J_0(x)$ (рис. 4.3). При этом для получения адекватной модели необходимо выбрать интервал дискретизации случайного процесса, имитирующего замирание, приближенно равным $\Delta t \approx \dfrac{1}{2\pi F_D}$ (при $F_D = 100$ Гц, $\Delta t = 1.59 \cdot 10^{-3}$ с). На рис. 4.3 показаны соответствующие кривые: 1 – функция Бесселя 1 рода нулевого порядка $J_0(k)$; 2 – нормированная КФ процесса авторегрессии 14-го порядка, сформированная по вышеупомянутой методике.

При моделировании кратковременных интервалов с замираниями ($T_a \ll 1$ мс) достаточно хорошей аппроксимацией служит процесс авторегрессии с КФ, совпадающей лишь с первым лепестком КФ Бесселя $J_0(x)$. При этом интервал дискретизации во времени вычисляется исходя из теоремы отсчетов по формуле $\Delta t = \dfrac{1}{2\,f_s}$ (при ширине полосы одной несущей OFDM-сигнала $f_s = 10^4$ Гц, $\Delta t = 5 \cdot 10^{-5}$ с).

Поскольку в системах с OFDM интервал между соседними несущими приближенно равен $\Delta f = 20$ кГц, исходя из (4.11) можно получить соответствующие начальные коэффициенты корреляции для уравнения авторегрессии второго порядка: $\rho_{f1} = 0.9695$ (при $\Delta f = 20000$ Гц) и $\rho_{f2} = 0.9418$ (при $\Delta f = 40000$ Гц).

Таким образом, при имитации замираний в частотной области КФ замираний может быть достаточно хорошо аппроксимирована моделью авторегрессии второго порядка:

$$x_i = \varphi_1 x_{i-1} + \varphi_2 x_{i-2} + \xi_i, \tag{4.13}$$

где $\varphi_1 = 0.9402$, $\varphi_2 = 0.0303$, ξ_k - отсчет нормированного белого гауссовского шума.

При аппроксимации суммы экспонент (4.11) моделью временного ряда в виде уравнения авторегрессии второго порядка параметры модели (4.11) имели следующие значения: $L = 6$, $\Delta f = 10000$ Гц. Другие параметры приведены в таблице 4.1. При этом мощность одного луча $\sigma_m^2 = 10\lg P_m$.

Таблица 4.1

Номер луча, m	Относительная задержка, τ_m (нс)	Средняя мощность, P_m (дБ)
1	0	0
2	310	–1
3	710	–9
4	1090	–10
5	1730	–15
6	2510	–20

На рис. 4.4 показаны соответствующие кривые: 1 – функция в виде суммы экспонент (4.11), 2 – нормированная КФ процесса авторегрессии второго порядка (4.13).

Следует отметить, что при реализации алгоритмов интерполяции по малому количеству наблюдений (по ближайшим отсчетам), предложенных во второй главе диссертационной работы, нет необходимости задавать полностью КФ - достаточно знать лишь коэффициенты корреляции между отсчетами, используемыми при формировании интерполяционной оценки. В связи с этим достаточно хорошей аппроксимацией будет являться т.н. «усеченная» КФ, используемая в данной работе при имитации кратковременных интервалов с замираниями и соответствующая авторегрессионным моделям малого (не выше 4-го или 5-го) порядка.

4.4. Приложения методов интерполяции к обработке изображений

Погрешности дискретного представления изображений. Реальное «физическое» изображение является функцией непрерывных пространственных координат - $f(x_1, x_2)$, в то время как в компьютере обрабатывается его дискретный аналог, матрица $f(n_1, n_2)$ - цифровое изображение. Оно лишь приближенно соответствует непрерывному. Несоответствие обусловлено погрешностями, которые вносятся в данные в процессе преобразования в цифровую форму. Оценка этих погрешностей позволяет определить потенциальные возможности процедур цифровой обработки (фильтрации, кодирования и т.п.) с точки зрения точности [52, 53].

Чтобы оценить погрешность, с которой непрерывное изображение описывается своими дискретным отсчетами, нужно восстановить непрерывную функцию по этим отсчетам и сравнить её с той, которая была до дискретизации.

Погрешность дискретизации изображения зависит от величины интервалов пространственной дискретизации Δ_1, Δ_2; статистических свойств изображения; способа восстановления непрерывного изображения (или вида интерполирующей функции).

С другой точки зрения выбор шага дискретизации определяется шириной пространственного спектра изображения [25, 40, 43, 85]. Чем больше ширина спектра $\Delta\Omega$, тем меньше шаг дискретизации Δ. Практически при дискретизации стремятся удовлетворить соотношению

$$\Delta << 2\pi/\Delta\Omega. \qquad (4.14)$$

К сожалению, реальные сигналы и изображения обычно не удовлетворяют требованиям ограниченности спектра, поэтому процедура восстановления при помощи идеального фильтра низких частот (ФНЧ) дает лишь приближенный результат [6, 27]. В связи с этим обычно используют простые в реализации способы восстановления, которые являются приближенными при любых характеристиках сигнала, т.е. восстанавливают не функцию $f\left(x_1, x_2\right)$, а некоторую её оценку $\widehat{f}\left(x_1, x_2\right)$.

Чаще всего используется восстановление при помощи полиномиальной интерполяции, при которой f и $\widehat{f}$ совпадают в узлах интерполяции (отсчетах) и, возможно, различаются при всех других значениях непрерывных аргументов.

Рассмотрим некоторые интерполирующие функции, которые используются при оценке погрешности дискретного представления изображений [53].

1. Прямоугольная (ступенчатая) несимметричная интерполяция.

$$\widehat{f}\left(x_1, x_2\right) = f\left(n_1\Delta_1,\, n_2\Delta_2\right)$$

для $n_1\Delta_1 \le x_1 \le \left(n_1 + 1\right)\Delta_1$ и $n_2\Delta_2 \le x_2 \le \left(n_2 + 1\right)\Delta_2$.

2. Прямоугольная (ступенчатая) симметричная интерполяция.

$$\widehat{f}\left(x_1, x_2\right) = f\left(n_1\Delta_1,\, n_2\Delta_2\right)$$

для $n_1\Delta_1 - \frac{\Delta_1}{2} \le x_1 < n_1\Delta_1 + \frac{\Delta_1}{2}$ и $n_2\Delta_2 - \frac{\Delta_2}{2} \le x_2 < n_2\Delta_2 + \frac{\Delta_2}{2}$.

Этот способ восстановления почти столь же прост, как и предыдущий, но является более точным. Нетрудно показать, что для полей с изотропными статистическими характеристиками погрешность восстановления при шагах Δ_1, Δ_2 равна погрешности несимметричной ступенчатой интерполяции при половинных шагах, т.е. при $\Delta_1/2,\, \Delta_2/2$. Несмотря на указанное преимущество, данная интерполяция также является довольно грубой. В обоих случаях функция яркости восстановленного непрерывного изображения получается ступенчатой. Имеющиеся на ней скачки ухудшают визуальное качество изображений.

3. Билинейная интерполяция. При восстановлении непрерывного изображения данным способом строится поверхность, проходящая через четыре соседних отсчета. Интерполирующая функция

$$\widehat{f}\left(x_1, x_2\right) = Ax_1x_2 + Bx_1 + Cx_2 + D \tag{4.15}$$

является линейной по каждой координате. Коэффициенты A, B, C, D выбираются из условия прохождения интерполирующей функции через отсчеты. Определим их для случая, когда интерполяция производится на прямоугольнике $0 \le x_1 \le \Delta_1$, $0 \le x_2 \le \Delta_2$. Это эквивалентно выбору «локальной» системы координат для каждых четырех отсчетов, образующих подобный прямоугольник. Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} f(0,0) = D, \\ f(\Delta_1, 0) = B\Delta_1 + D, \\ f(0, \Delta_2) = C\Delta_2 + D, \\ f(\Delta_1, \Delta_2) = A\Delta_1\Delta_2 + B\Delta_1 + C\Delta_2 + D. \end{cases}$$

Её решение имеет следующий вид:

$$D = f(0,0), \quad B = \frac{f(\Delta_1, 0) - f(0,0)}{\Delta_1}, \quad C = \frac{f(0, \Delta_2) - f(0,0)}{\Delta_2},$$

$$A = \frac{f(\Delta_1, \Delta_2) - f(\Delta_1, 0) - f(0, \Delta_2) + f(0,0)}{\Delta_1\Delta_2}.$$

Подставив эти коэффициенты в (4.15), получим интерполирующую функцию.

Существуют и другие, более сложные, интерполирующие функции, но они не всегда дают выигрыш в точности. Например, для экспоненциально спадающих автокорреляционных функций (АКФ) поля билинейная интерполяция близка к оптимальной. В случаях, когда налагаются жесткие ограничения на сложность, обычно используется прямоугольная интерполяция. Следует отметить, что введенные интерполирующие функции важны не только для оценки погрешности восстановления непрерывного изображения по отсчетам. Они широко применяются при геометрических преобразованиях цифрового изображения [25, 40, 59]. Наряду с этим следует упомянуть обширный класс базисных вейвлет-функций, на основе которых синтезируются интерполирующие вейвлет-фильтры, широко используемые при разработке алгоритмов сжатия изображений [49].

Оценка среднеквадратической погрешности дискретизации. Пусть интерполяция между отсчетами на каждом двумерном интервале производится одним и тем же способом. Тогда все интервалы со статистической точки зрения эквивалентны, и при анализе достаточно рассмотреть один из них. Возьмем интервал $\left\{0 \le x_1 \le \Delta_1;\, 0 \le x_2 \le \Delta_2\right\}$. Если $f\left(x_1, x_2\right)$ - исходное изображение, $\widehat{f}\left(x_1, x_2\right)$ - восстановленное, то в каждой точке изображения имеем ошибку $\varepsilon_X\left(x_1, x_2\right) = f\left(x_1, x_2\right) - \widehat{f}\left(x_1, x_2\right)$. При этом дисперсия ошибки в каждой точке

$$\sigma_\varepsilon^2\left(x_1, x_2\right) = M\left\{\varepsilon_X^2\left(x_1, x_2\right)\right\}.$$

Среднеквадратичная погрешность по всему полю определяется через усредненную дисперсию. Так как поле стационарно, усреднение достаточно выполнить по одному интервалу. Получаем средний квадрат ошибки в виде:

$$\varepsilon_{X\,\text{кв}}^2 = \frac{1}{\Delta_1 \Delta_2} \int_0^{\Delta_1} \int_0^{\Delta_2} \sigma_\varepsilon^2\left(x_1, x_2\right) dx_1\, dx_2 .$$

В работе [53] представлены значения (табл. 4.2) среднего квадрата ошибки $\dfrac{\varepsilon_{X\,\text{кв}}^2}{\sigma_f^2}$ для разных интерполирующих функций и АКФ.

Таблица 4.2

<table>
<tr><th rowspan="2">АКФ</th><th colspan="3">Интерполяция</th></tr>
<tr><th>Прямоугольная несимметричная</th><th>Прямоугольная симметричная</th><th>Билинейная</th></tr>
<tr><td>Биэкспоненциальная: $R_f\left(n_1, n_2\right) = \rho^{\left|n_1\right| + \left|n_1\right|}$</td><td rowspan="2">$2(1-\rho)$</td><td rowspan="2">$(1-\rho)$</td><td rowspan="2">$\frac{2}{3}(1-\rho)$</td></tr>
<tr><td>Экспоненциальная неразделимая (изотропная): $R_f\left(n_1, n_2\right) = \rho^{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}}$</td></tr>
<tr><td>Гауссова изотропная: $R_f\left(n_1, n_2\right) = \rho^{n_1^2 + n_2^2}$</td><td>$\frac{4}{3}(1-\rho)$</td><td>$\frac{1}{3}(1-\rho)$</td><td>$\frac{23}{90}(1-\rho)^2$</td></tr>
</table>

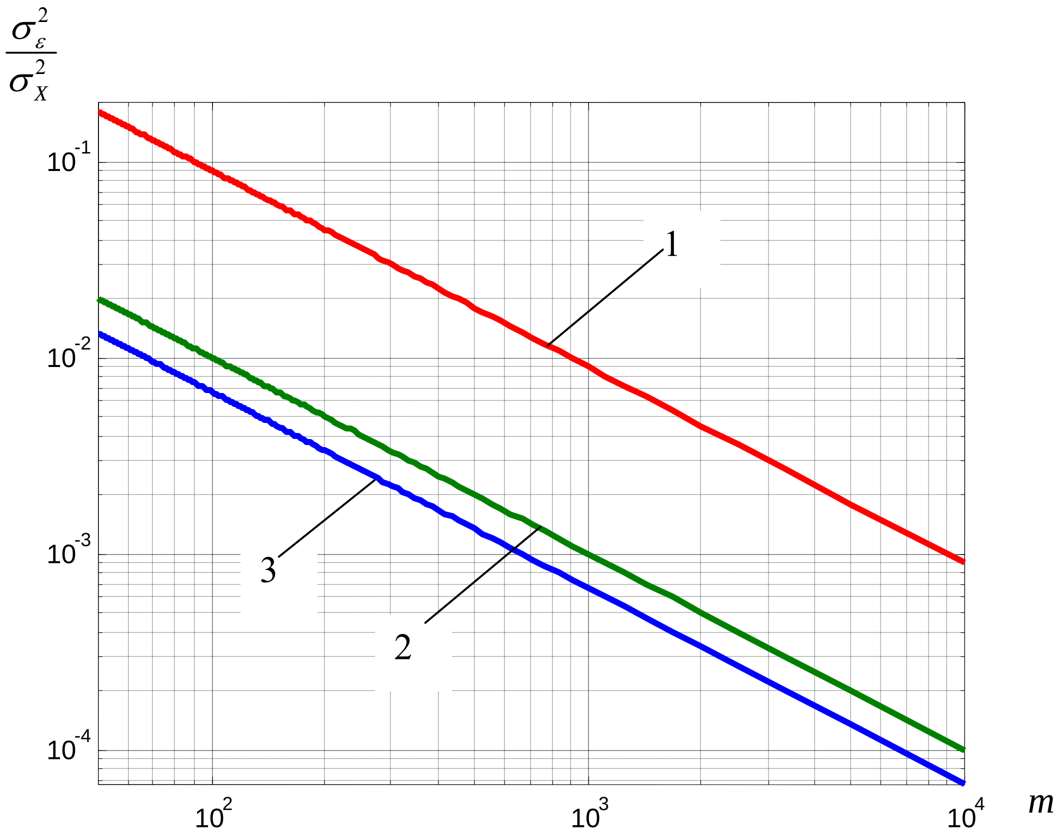


Рис. 4.5

Анализ данных, представленных в табл. 4.2, показал, что самым точным из рассмотренных является метод билинейной интерполяции. Выигрыш от его применения особенно значителен для «гладких» изображений, имеющих гауссовскую АКФ.

В п. 2.2 рассмотрена интерполяция по четырем точкам при отсутствии шума. В случае множительной КФ выражение для дисперсии ошибки интерполяции имеет вид

$$\frac{\sigma_{\varepsilon 0}^2}{\sigma_x^2} = 1 - \frac{4\rho^2}{\left(1+\rho\right)^2}. \tag{4.16}$$

В то же время наиболее точным по табл. 4.2 является метод билинейной интерполяции, который дает приближенное среднее значение дисперсии ошибки интерполяции

$$\frac{\sigma_{\varepsilon 0}^2}{\sigma_x^2} \approx \frac{2}{3}\left(1-\rho\right). \tag{4.17}$$

При этом в работе [53] показано, что максимальное значение дисперсии ошибки для метода билинейной интерполяции имеет вид

$$\frac{\sigma_{\varepsilon 0}^2}{\sigma_x^2} \approx 9(1-\rho). \qquad (4.18)$$

На рис. 4.5 показаны графические зависимости относительной дисперсии ошибки интерполяции по четырем отсчетам от интервала корреляции при отсутствии шума наблюдений для трех рассматриваемых случаев: кривая 1 соответствует формуле (4.18), кривая 2 – (4.16), кривая 3 – (4.17). При этом очевидно, что предлагаемый в разделе 2.2 метод оптимальной интерполяции дает существенно меньшую (на порядок) максимальную дисперсию ошибки интерполяции.

Декомпрессия изображений. В работе [110] описан метод иерархической сеточной интерполяции, основанный на многоуровневом представлении цифрового изображения. Его суть состоит в следующем. В памяти ЭВМ хранится двумерный массив отсчетов изображения, прореженного в 2^R раз по каждой координате, и набор поправок, дополняющих его до массивов, имеющих коэффициенты прореживания $2^{R-1}, 2^{R-2}$ и так далее, вплоть до полного изображения. На каждом иерархическом уровне прореженный двумерный массив отсчетов используется для восстановления (интерполяции) пропущенных отсчетов следующего, более детального уровня. Формируемые при этом разности между исходными отсчетами и их интерполированными значениями квантуются так, чтобы гарантировалось их восстановление с заданной точностью. Для дополнительного уменьшения объема данных квантованные разности подвергаются статистическому кодированию.

Как показали теоретические и экспериментальные исследования [21, 53, 110], важнейшими свойствами метода и конкретных алгоритмов иерархической сеточной интерполяции, обусловившими их преимущества перед другими известными алгоритмами сжатия изображений, являются: управление величиной ошибки восстановления отсчетов изображения после компрессии; высокая эффективность, оцениваемая в координатах

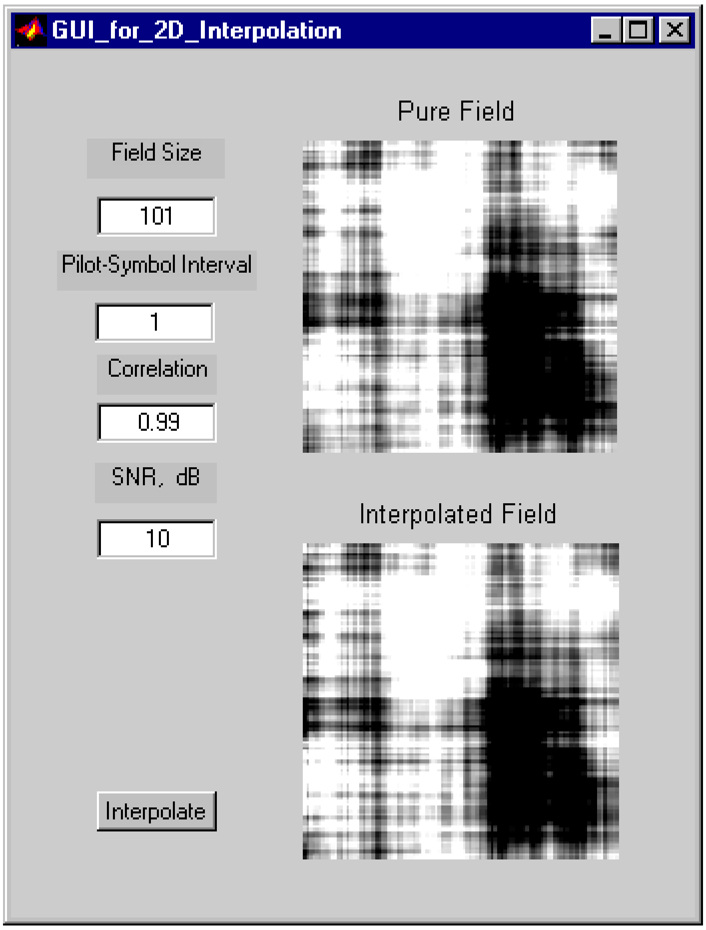


Рис. 4.6

«коэффициент сжатия – погрешность восстановления» изображения; малая вычислительная сложность; возможность мультиразрешения, т.е. быстрого получения уменьшенных (прореженных) копий входного изображения без его полного восстановления.

Результаты, полученные во второй главе, могут найти непосредственное применение в алгоритмах сеточной интерполяции, поскольку позволяют оценить погрешности интерполяции при различных параметрах СП.

Интерполяция методом кубической свертки. Необходимость в более точных методах интерполяции, нежели линейная, привела к разработке распространенной методики, известной как кубическая свертка, которая включает в себя ядро по форме напоминающее функцию $\sin x/x$ и составленное из кусочных кубических полиномов [118]. Кубическая свертка детально рассмотрена в работах [117, 125]. Одним из первых применений кубической свертки, отмеченных в литературе, была геометрическая коррекция цифровых изображений, полученных с искусственных спутников Земли.

Интерполяция по методу сплайнов. Использование сплайнов для интерполяции цифровых изображений описано в работах [97, 115, 117]. Рассматриваемые в них подходы, главным образом сосредоточены на кубических В-сплайнах и основаны на обращении матриц для вычисления коэффициентов c_k в выражении для интерполируемой функции

$$f_T(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \varphi\left(\frac{x}{T} - k\right) \tag{4.19}$$

где φ - ядро, T - интервал дискретизации.

Качественные эксперименты, включающие в себя увеличение и уменьшение размеров изображения, показали превосходство интерполяции кубическими В-сплайнами по сравнению с методами интерполяции по ближайшим соседям, линейной интерполяции или интерполяции с помощью усеченной функции $\sin x/x$ в качестве ядра. Результаты экспериментов по увеличению изображения также показали необходимость использования коэффициентов c_k, нежели оригинальных отсчетов s_k в этом виде интерполяции по формуле (4.19) с целью сохранения разрешающей способности насколько это возможно.

Многие из рассмотренных методов интерполяции не являются идеальными, поскольку либо для используемых при этом моделей изображений затруднительно разработать алгоритм оптимальной обработки, либо требуется задание адекватных и, зачастую, довольно сложных моделей СП.

Рассмотрим разработанную программу, предназначенную для интерполяции СП с разделимой КФ, заданного соответствующими параметрами СП: коэффициентом корреляции ρ и ОСШ q (дБ). Копия экрана интерфейса изображена на рис. 4.6. Кроме этого, в программе имеется возможность задавать размеры СП и степень разреженности регулярной дискретной сетки (Pilot-Symbol Interval - количество отсчетов между известными наблюдениями).

4.5. Выводы

1. Показано, что проблемы, имеющие место при проектировании устройств оценивания параметров канала связи в системах связи с ортогональным частотным мультиплексированием непосредственно связаны с разработкой эффективных алгоритмов интерполяции СП. Рассмотрены возможные применения предложенных в главах 2 и 3 алгоритмов интерполяции СП и оптимизации размещения датчиков на дискретной сетке.

2. Предложена авторегрессионная модель канала связи с замираниями и доплеровским смещением спектра путем аппроксимации КФ случайных коэффициентов передачи канала связи, позволяющая синтезировать оптимальные алгоритмы обработки сигналов для многочастотных систем связи с OFDM.

3. Рассмотрены известные алгоритмы интерполяции изображений. Показано, что при отсутствии наблюдений методы интерполяции, предлагаемые в п. 2.2, позволяют снизить максимальную ошибку интерполяции примерно в 10 раз по сравнению с методом билинейной интерполяции. Рассмотрены возможности использования результатов, полученных в диссертационной работе, при решении задач, связанных с интерполяцией изображений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты диссертационной работы заключаются в следующем.

1. Анализ алгоритмов интерполяции СП по неполным наблюдениям показал, что существующие на данный момент алгоритмы интерполяции СП имеют ряд недостатков. Показано, что актуальной проблемой является снижение вычислительных затрат при нахождении оптимального плана размещения датчиков на дискретной сетке с целью минимизации максимальной дисперсии ошибки интерполяции.

2. Предложен алгоритм интерполяции случайных полей на основе оптимальных оценок. Проведен сравнительный анализ точности, а также моделирование алгоритмов интерполяции СП на основе зашумленных наблюдений и на основе оптимальных оценок. Показано, что при интерполяции на основе оптимальных оценок удается достичь выигрыша по дисперсии ошибки интерполяции порядка 10-30 % - для одномерного СП и в 2-3 раза – для двумерного СП по сравнению с алгоритмом интерполяции по зашумленным наблюдениям при незначительном увеличении вычислительных затрат.

3. Получены выражения, позволяющие оценить максимальную дисперсию ошибки интерполяции по наблюдениям, заданным на N-мерной прямоугольной сетке. Получены зависимости позволяющие по заданной максимальной дисперсии ошибки интерполяции определить необходимые корреляционные расстояния между наблюдениями, используемыми для восстановления непрерывного информационного СП с заданным ОСШ.

4. Разработаны алгоритмы поиска оптимального плана размещения датчиков на одно- и двумерной дискретных сетках. Показано, что метод улучшенного перебора позволяет существенно снизить вычислительные затраты, связанные с поиском оптимального плана размещения датчиков.

5. Получены зависимости выигрыша в максимальной дисперсии ошибки интерполяции, который достигает 20-30 % за счет оптимизации размещения

датчиков. Даны рекомендации по выбору количества размещаемых датчиков на сетке заданных размеров в зависимости от требуемого качества интерполяции при различных параметрах СП.

6. Разработан комплекс программ, позволяющий осуществлять поиск оптимального плана размещения пилот-сигналов на одно- и двумерной сетке при различных параметрах сигнала, размерах дискретной сетки, количестве пилот-сигналов. Реализованные программные пакеты в среде MatLab имеют простую структуру и могут быть изменены для решения различных прикладных задач.

7. Рассмотрены возможные применения разработанных алгоритмов интерполяции СП и оптимизации размещения датчиков на дискретной сетке в многочастотных системах связи с пилот-сигналами, а также при разработке новых алгоритмов обработки изображений.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Адаптивные фильтры / под ред. К. Ф. Н. Коуэна, П. М. Гранта; пер. с англ. Н. Н. Лихацкой, под ред. С. М. Ряковского. – М. : Мир, 1988. – 392 с.
2. Александров, В. В. Применение базисных сплайнов в задачах дискретизации многомерных сигналов конечной протяженности / В. В. Александров // Измерительная техника. – 2000. – № 1. – С. 3–6.
3. Андерсон, Дж. Дискретная математика и комбинаторика / Дж. Андерсон; пер. с англ. М. М. Беловой, под ред. С. С. Шкильняка и М. Р. Саит-Аметова. – М. : Вильямс, 2003. – 960 с.
4. Балакришнан, А. В. Теория фильтрации Калмана / А. В. Балакришнан; пер. с англ. С. М. Зуева, под ред. А. А. Новикова. – М. : Мир, 1988. – 168 с.
5. Бакалов, В. П. Цифровое моделирование случайных процессов / В. П. Бакалов. – М. : Сайнс-пресс, 2002. – 88 с. – (Серия «Конспекты лекций по радиотехническим дисциплинам» ; вып. 4).
6. Басараб, М. А. Цифровая обработка сигналов на основе теоремы Уиттекера-Котельникова-Шеннона / М. А. Басараб, Е. Г. Зелкин, В. Ф. Кравченко, В. П. Яковлев. – М. : Радиотехника, 2004. – 72 с.
7. Бокс, Дж. Анализ временных рядов. Прогноз и управление. В 2 вып. Вып. 1 / Дж. Бокс, Г. Дженкинс; пер. с англ. А. Л. Левшина, под ред. В. Ф. Писаренко. – М. : Мир, 1974. – 406 с.
8. Бор, К. де Практическое руководство по сплайнам / К. де Бор; пер. с англ. В. К. Галицкого и С. А. Шестакова, под ред. В. И. Скурихина. – М. : Радио и связь, 1985. – 304 с.
9. Браммер, К. Фильтр Калмана-Бьюси / К. Браммер, Г. Зиффлинг; пер. с нем. В. Б. Колмановского, под ред. И. Е. Казакова. – М. : Наука, 1982. – 200 с.
10. Быков, В. В. Цифровое моделирование в статистической радиотехнике / В. В. Быков. – М. : Советское радио, 1971. – 328 с.

11. Ван Трис, Г. Теория обнаружения, оценок и модуляции. В 3 т. Т. 1 / Г. Ван Трис; пер. с англ. В.В.Липьяйнена, под ред. В.И.Тихонова. – М. : Советское радио, 1972. – 744 с.
12. Василенко, Г. И. Восстановление изображений / Г. И. Василенко, А. М. Тараторин. – М. : Радио и связь, 1986. – 300 с.
13. Васильев, К. К. Нелинейные модели случайных многомерных полей / К. К. Васильев // Методы обработки сигналов и полей : сб. науч. тр. / Ульян. политехн. ин-т. – Ульяновск, 1987. – С. 13–19.
14. Васильев, К. К. Калмановская фильтрация изображений / К. К. Васильев, В. Г. Герчес // Методы обработки сигналов и полей : сб. науч. тр. / Ульян. политехн. ин-т. – Ульяновск, 1990. – С. 105–111.
15. Васильев, К. К. Анализ эффективности фильтрации многомерных случайных полей / К. К. Васильев // Методы обработки сигналов и полей : сб. науч. тр. / Ульян. политехн. ин-т. – Ульяновск, 1992. – С. 18–27.
16. Васильев, К. К. Методы фильтрации многомерных случайных полей / К. К. Васильев, В. Р. Крашенинников. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1990. – 128 с.
17. Васильев, К. К. Алгоритм минимизации максимальной дисперсии ошибки оценивания комплексных амплитуд в многочастотных системах связи / К. К. Васильев, М. Н. Служивый // Труды X Международной НТК «Радиолокация, навигация, связь». – Воронеж, 2004. – С. 301–304.
18. Васильев, К. К. Восстановление случайных полей по дискретным отсчетам : тез. докл. 7-й Междунар. науч-техн. конф. «Цифровая обработка сигналов и её применение» / К. К. Васильев, М. Н. Служивый // Труды РНТОРЭС им. А.С.Попова. – М., 2005. – С. 345–349. – (Серия «Цифровая обработка сигналов и её применение» ; вып. VII-2)
19. Васильев, К. К. Сравнительный анализ алгоритмов интерполяции случайных полей : тез. докл. 8-й Междунар. науч-техн. конф. «Цифровая обработка сигналов и её применение» / К. К. Васильев, М. Н. Служивый // Труды

РНТОРЭС им. А.С.Попова. – М., 2006. – С. 412–413. – (Серия «Цифровая обработка сигналов и её применение» ; вып. VIII-2)

20. Винклер, Г. Анализ изображений, случайные поля и динамические методы Монте-Карло. Математические основы / Г. Винклер. – Новосибирск : Изд-во СО РАН, Фил. «Гео», 2002. – 343 с.
21. Виттих, В. А. Обработка изображений в автоматизированных системах научных исследований / В. А. Виттих, В. В. Сергеев, В. А. Сойфер. – М. : Наука, 1982. – 312 с.
22. Волков, Л. Н. Системы цифровой радиосвязи: базовые методы и характеристики / Л. Н. Волков, М. С. Немировский, Ю. С. Шинаков. – М. : Эко-Трендз, 2005. – 392 с.
23. Годунов, С. К. Разностные схемы / С. К. Годунов, В. С. Рябенький. – М. : Наука, 1977. – 440 с.
24. Голяницкий, И. А. Математические модели и методы в радиосвязи / И. А. Голяницкий; под ред. Ю. А. Громакова. – М. : Эко-Трендз, 2005. – 440 с.
25. Гонсалес, Р. Цифровая обработка изображений / Р. Гонсалес, Р. Вудс; пер. с англ. – М. : Техносфера, 2004. – 912 с.
26. Гренандер, У. Краткий курс вычислительной вероятности и статистики / У. Гренандер, В. Фрайбергер; пер. с англ., под ред. С. М. Ермакова. – М. : Наука, 1978. – 192 с.
27. Даджион, Д. Цифровая обработка многомерных сигналов / Д. Даджион, Р. Мерсеро; пер. с англ. В. А. Григорьева, К. Г. Финогенова, под ред. Л. П. Ярославского. – М. : Мир, 1988. – 488 с.
28. Денисенко, А. Н. Применение различных методов восстановления непрерывных сигналов по их дискретным значениям / А. Н. Денисенко, В. Н. Исаков // Радиотехника. – 2001. – № 10. – С. 16–20.
29. Дерин, Х. Случайные процессы марковского типа с дискретными аргументами / Х. Дерин, П. Келли // ТИИЭР. – 1989. – Т. 77, № 10. – С. 42–71.

30. Джайн, А. К. Успехи в области математических моделей для обработки изображений / А. К. Джайн // ТИИЭР. – 1981. – Т. 69, № 5. – С. 9–39.
31. Дьяконов, В.П. MATLAB. Обработка сигналов и изображений. Специальный справочник / В. П. Дьяконов. – СПб. : Питер, 2002. – 608 с.
32. Ершов, Л. А. Марковская модель декаметрового канала связи / Л. А. Ершов, А. В. Коренной, А. В. Шелковников // Радиотехника. – 1998. – № 3. – С. 7-14.
33. Жуков, А. И. Метод Фурье в вычислительной математике / А. И. Жуков. – М. : Наука, 1992. – 176 с.
34. Зяблов, В. В. Высокоскоростная передача сообщений в реальных каналах / В. В. Зяблов, Д. Л. Коробков, С. Л. Портной. – М. : Радио и связь, 1991. – 288 с.
35. Игнатов, М. И. Натуральные сплайны многих переменных / М. И. Игнатов, А. Б. Певный. – Л. : Наука, Ленинградское отделение, 1991. – 125 с.
36. Казаков, В. А. Восстановление реализаций нестационарных случайных процессов по совокупности дискретных отсчетов / В. А. Казаков, М. А. Беляев // Известия вузов. Радиоэлектроника. – 1997. – №9. – С. 43–49.
37. Кашьяп, Р. Л. Построение динамических стохастических моделей по экспериментальным данным / Р. Л. Кашьяп, А. Р. Рао; пер. с англ., под ред. В.С.Пугачёва. – М. : Наука, 1983. – 384 с.
38. Кемени, Дж. Введение в конечную математику / Дж. Кемени, Дж. Снелл, Дж. Томпсон. – М. : Мир, 1965. – 486 с.
39. Коршунов, Ю. М. Математические основы кибернетики / Ю. М. Коршунов. – М. : Энергоатомиздат, 1987. – 494 с.
40. Красильников, Н. Н. Цифровая обработка изображений / Н. Н. Красильников. – М. : Вузовская книга, 2001. – 320 с.
41. Крашенинников, В. Р. Волновые модели многомерных случайных полей / В. Р. Крашенинников // Методы обработки сигналов и полей : сб. науч. тр. / Ульян. политехн. ин-т. – Ульяновск, 1987. – С. 5–13.
42. Крейнделин, В. Б. Итерационный алгоритм фазовой синхронизации в системе OFDM, использующей рассеянные пилот-сигналы /

В. Б. Крейнделин, А. В. Колесников // Радиотехника. – 2005. – № 10. – С. 37–40.

43. Кучеренко, К. И. Двумерные медианные фильтры для обработки изображений / К. И. Кучеренко, Е. Ф. Очин // Зарубежная радиоэлектроника. – 1986. – № 6. – С. 50–61.

44. Лебедев, А. Н. Вероятностные методы в инженерных задачах: Справочник / А. Н. Лебедев, М. С. Куприянов, Д. Д. Недосекин, Е. А. Чернявский. – СПб. : Энергоатомиздат, Санкт-Петербургское отделение, 2000. – 333 с.

45. Левин, Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники / Б. Р. Левин. – М. : Радио и связь, 1989. – 656 с.

46. Леоненко, Н. Н. Статистический анализ случайных полей / Н. Н. Леоненко, А. В. Иванов. – Киев : Вища школа, 1986. – 216 с.

47. Липцер, Р. Ш. Статистика случайных процессов / Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев. – М. : Наука, 1974. – 696 с.

48. Литтл, Р. Дж. А. Статистический анализ данных с пропусками / Р. Дж. А. Литтл, Д. Б. Рубин; пер. с англ. А. М. Никифорова. – М. : Финансы и статистика, 1991. – 336 с. – (Серия «Математико-статистические методы за рубежом»)

49. Малла, С. Вэйвлеты в обработке сигналов / С. Малла; пер. с англ. Я. М. Жилейкина. – М. : Мир, 2005. – 671 с.

50. Малышев, В. А. Гиббсовские случайные поля. Кластерные разложения / В. А. Малышев, Р. А. Минлос. – М. : Наука, 1985. – 288 с.

51. Маркюс, Ж. Дискретизация и квантование / Ж. Маркюс; пер. с франц. З. Л. Персица, под ред. А. В. Шилейко. – М. : Энергия, 1969. – 144 с.

52. Методы компьютерной обработки изображений: учебное пособие / под ред. В. А. Сойфера. – 2-е изд. – М. : Физматгиз, 2004. – 317 с.

53. Методы компьютерной обработки изображений / под ред. В. А. Сойфера. – М. : Физматлит, 2001. – 784 с.

54. Мирабель, А. П. Об одном алгоритме в задаче интерполяции многомерных временных рядов / А. П. Мирабель, Л. И. Питербарг // Проблемы передачи информации. – 1982. – № 3. – С. 53–61.
55. Новиков, А. А. Оптимальная интерполяция частично наблюдаемых двумерных случайных полей / А. А. Новиков // Probability Theory Banach Center Publications, PWN – Polish Scientific Publishers. – Warsaw, 1979. – Vol. 5. – P. 211–220.
56. Попело, В. Д. Оценивание случайных полей при обработке изображений в условиях наличия локально пораженных участков и неоднородностей / В. Д. Попело, А. А. Сирота, М. Н. Лантюхов // Радиотехника. – 2001. – № 10. – С. 91–95.
57. Пригарин, С. М. Методы численного моделирования случайных процессов и полей / С. М. Пригарин. – Новосибирск : Изд-во ИВМиМГ СО РАН, 2005. – 259 с.
58. Прикладная теория случайных процессов и полей / Васильев К. К., Драган Я. П., Казаков В. А. и др.; под ред. Васильева К. К. и Омельченко В. А. – Ульяновск : УлГТУ, 1995. – 256 с.
59. Прэтт, У. Цифровая обработка изображений / У. Прэтт; пер. с англ., под ред. Д. С. Лебедева. – М. : Мир, 1982. – 790 с.
60. Пугачев, В. С. Стохастические дифференциальные системы: анализ и фильтрация / В. С. Пугачев, И. Н. Синицын. – М. : Наука, 1990. – 630 с.
61. Рамм, А. Г. Теория оценивания случайных полей / А. Г. Рамм. – М. : Мир, 1996. – 352 с.
62. Растригин, Л. А. Статистические методы поиска / Л. А. Растригин. – М. : Наука, 1968. – 376 с.
63. Родимов, А. П. Проблемы построения процедур обработки двумерных случайных полей / А. П. Родимов, В. В. Поповский, В. И. Дмитриев, В. В. Никитченко // Зарубежная радиоэлектроника. – 1981. – № 5. – С. 96–105.

64. Романовский, И. В. Дискретный анализ / И. В. Романовский. – 3-е изд. – СПб. : Нев. диалект, БХВ-Петербург, 2003. – 320 с.
65. Саати, Т. Целочисленные проблемы оптимизации и связанные с ними экстремальные проблемы / Т. Саати; пер. с англ. В. Н. Веселова, под ред. И. А. Ушакова. – М. : Мир, 1973. – 302 с.
66. Самарский, А. А. Теория разностных схем: учебное пособие / А. А. Самарский. – М. : Наука, 1989. – 614 с.
67. Самарский, А. А. Численные методы: учебное пособие / А. А. Самарский, А. В. Гулин. – М. : Наука, 1989. – 429 с.
68. Связь с подвижными объектами в диапазоне СВЧ / под ред. У. К. Джейкса; пер. с англ., под ред. М. С. Ярлыкова и М. В. Чернякова. – М. : Связь, 1979. – 520 с.
69. Сейдж, Э. П. Теория оценивания и её применение в связи и управлении / Э. П. Сейдж, Дж. Л. Мелс; пер. с англ., под ред. Б. Р. Левина. – М. : Связь, 1976. – 495 с.
70. Сергиенко, А. Б. Цифровая обработка сигналов: учебное пособие для вузов / А. Б. Сергиенко. – СПб. : Питер, 2002. – 608 с.
71. Сизиков, В. С. Устойчивые методы обработки результатов измерений: учебное пособие / В. С. Сизиков. – СПб. : СпецЛит, 1999. – 240 с.
72. Служивый, М. Н. Исследование алгоритмов расстановки пилот-сигналов в многочастотных системах связи / М. Н. Служивый, С. М. Наместников // Вестник УлГТУ. – 2004. – №2. – С. 51–54.
73. Служивый, М. Н. Алгоритм полного перебора вариантов расстановки пилот-сигналов в многочастотных системах связи / М. Н. Служивый // Труды 4-й Всеросс. науч.-практ. конф. «Современные проблемы создания и эксплуатации радиотехнических систем». – Ульяновск, 2004. – С. 74–77.
74. Служивый, М. Н. Анализ погрешностей интерполяции случайных полей по дискретным отсчетам / М. Н. Служивый // Вестник УлГТУ. – 2005. – №3. – С. 64–67.

75.Служивый, М. Н. Алгоритмы интерполяции случайных последовательностей и полей по малому количеству наблюдений : тез. докл. / М. Н. Служивый // Труды РНТОРЭС им. А.С.Попова. – М., 2006. – С. 355–358. – (Серия «Научная сессия, посвященная Дню Радио» ; вып. LXI)
76.Сотсков, Б. М. Теория и техника калмановской фильтрации при наличии мешающих параметров / Б. М. Сотсков, В. Ю. Щербаков // Зарубежная радиоэлектроника. – 1985. – № 2. – С. 3–30.
77.Спектор, А. А. Многомерные дискретные марковские поля и их фильтрация при наличии некоррелированного шума / А. А. Спектор // Радиотехника и электроника. – 1985. – Т. 30, № 5. – С. 965–972.
78.Спектор, А. А. Двухэтапная фильтрация изображений при действии коррелированной помехи / А. А. Спектор // Радиотехника. – 1985. – № 9. – С. 21–23.
79.Спектор, А. А. Исследование точности рекуррентной фильтрации изображения / А. А. Спектор, Ю. Э. Малов // Методы обработки сигналов и полей : сб. науч. тр. / Ульян. политехн. ин-т. – Ульяновск, 1987. – С. 38–44.
80.Спектор, А. А. Рекуррентная фильтрация гауссовских дискретных полей, наблюдаемых в гауссовских шумах / А. А. Спектор // Радиотехника и электроника. – 1994. – Т. 39, № 7. – С. 1132–1140.
81.Справочник по теории вероятностей и математической статистике. / сост. В. С. Королюк, Н. И. Портенко, А. В. Скороход, А. Ф. Турбин; под ред. В. С. Королюка. – Киев : Наукова думка, 1985. – 583 с.
82.Стечкин, С. Б. Сплайны в вычислительной математике / С. Б. Стечкин, Ю. Н. Субботин. – М. : Наука, 1976. – 248 с.
83.Тихонов, В. И. Статистический синтез и анализ радиотехнических систем и устройств / В. И. Тихонов, В. Н. Харисов. – М. : Радио и связь, 1991. – 608 с.
84.Тихонов, В. И. Марковские процессы / В. И. Тихонов, М. А. Миронов. – М. : Советское радио, 1977. – 488 с.
85.Устинов, Н. Д. Цифровые методы восстановления и фильтрации изображений / Н. Д. Устинов, В. Н. Ломакин, Ю. К. Клоков,

В. Н. Сидельников, Р. Р. Хамитов // Зарубежная радиоэлектроника. – 1978. – № 10. – С. 3–18.

86. Фомин, В. Н. Операторные методы теории линейной фильтрации случайных процессов / В. Н. Фомин. – М. : Наука, 1996. – 308 с.
87. Хабиби, А. Двумерная байесовская оценка изображений / А. Хабиби // ТИИЭР. – 1972. – Т. 60, № 7. – С. 153–159.
88. Хемминг, Р. В. Численные методы для научных сотрудников и инженеров / Р. В. Хемминг; пер. с англ., под ред. Р. Г. Гутера. – М. : Наука, 1972. – 400 с.
89. Цифровая обработка изображений в информационных системах: учебное пособие / сост. И. С. Грузман, В. С. Киричук, В. П. Косых, В. Н. Перетягин, А. А. Спектор. – Новосибирск : НГТУ, 2002. – 352 с.
90. Шафер, Р. Методы цифровой обработки сигналов в задачах интерполяции / Р. Шафер, Л. Рабинер // ТИИЭР. – 1973. – Т. 61, № 6. – С. 5–18.
91. Шлома, А. М. Адаптивная интерполяция нестационарных марковских последовательностей / А. М. Шлома // Известия вузов. Радиоэлектроника. – 1991. – № 3. – С. 52–56.
92. Шмелев, А. Б. Основы марковской теории нелинейной обработки случайных полей / А. Б. Шмелев. – М. : МФТИ, 1998. – 208 с.
93. Яглом, А. М. Экстраполирование, интерполирование и фильтрация стационарных процессов с рациональной спектральной плотностью / А. М. Яглом // Тр. Моск. мат. об-ва. – 1955. – Т. 4. – С. 333–374.
94. Adireddy, S. Optimal placement of training for frequency selective block-fading channels / S. Adireddy, L. Tong, H. Viswanathan // IEEE Transactions on Information Theory. – 2002. – Vol. 48, No. 8. – P. 2338–2353.
95. Aidarous, S. E. Optimal sensors’ allocation strategies for a class of stochastic distributed systems / S. E. Aidarous, M. R. Gevers, M. I. Installe // Intern. J. Contr. – 1975. – Vol. 21. – P. 197–213.
96. Cai, X. Error probability minimizing pilots for OFDM with M-PSK modulation over Rayleigh fading channels / X. Cai, G. B. Giannakis // IEEE Transactions on Vehicular Technology. – 2004. – Vol. 53, No.1. – P. 146–155.

97. Caselles, V. An Axiomatic Approach to Image Interpolation / V. Caselles, J.-M. Morel, C. Sbert // IEEE Transactions on Image Processing. – 1998. – Vol. 7, No. 3. – P. 376–390.
98. Cavers, J. K. An Analysis of Pilot Symbol Assisted Modulation for Rayleigh Fading Channels / J. K. Cavers // IEEE Transactions on Vehicular Technology. – 1991. – Vol. 40, No. 4. – P. 686–693.
99. Chang, R. W. Synthesis of band-limited orthogonal signals for multichannel data transmission / R. W. Chang // Bell System Tech. J. – 1966. – Vol. 45, No. 12. – P. 1775–1796.
100. Chen, W. H. Optimal location of process measurements / W. H. Chen, J. H. Seinfeld // Intern. J. Contr. – 1975. Vol. 21. – P. 1003–1014.
101. Cheng, Zh. Time versus Frequency Domain Channel Tracking Using Kalman Filters for OFDM Systems with Antenna Arrays. ICSP'02, Aug.26-30, 2003 / Zh. Cheng, D. Dahlhaus // Proc. of the 6th Intern. Conf. on Signal Processing. – 2003. – Vol. 2. – P. 1340–1343.
102. Ciesielski, Z. Probabilistic and Analytic Formulas for the Periodic Splines Interpolating with Multiple Nodes / Z. Ciesielski // Probability Theory Banach Center Publications, PWN – Polish Scientific Publishers. – Warsaw. – 1979. – Vol. 5. – P. 35–45.
103. Cimini, L. J. Analysis and simulation of digital mobile channel using orthogonal frequency division multiplexing / L. J. Cimini // IEEE Transactions on Communications. – 1985. – Vol. 33, No. 7. – P. 665–675.
104. Coleri, S. Channel estimation techniques based on pilot arrangement in OFDM systems / S. Coleri, M. Ergen, A. Puri, A. Bahai // IEEE Transactions on Broadcasting. – 2002. – Vol. 48, No. 9. – P. 223–229.
105. Curtain, R. F. Optimal location of sensors for filtering for distributed systems / R. F. Curtain, A. Ichikawa // Lect. Notes Contr. Inform. Sci.. – 1978. – Vol. 1. – P. 236–255.

106. Dikshit, S. S. A Recursive Kalman Window Approach to Image Restoration / S. Dikshit // IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing. – 1982. – Vol. 30, No. 4. – P. 125–140.
107. Dong, M. Optimal Design and Placement of Pilot Symbols for Channel Estimation / M. Dong, L. Tong // IEEE Transactions on Signal Processing. – 2002. – Vol. 50, No. 12. – P. 3055–3069.
108. Edfors, O. OFDM channel estimation by singular value decomposition / O. Edfors, M. Sandell, J.-J. van de Beek, S. K. Wilson, P. O. Borjesson // IEEE Transactions on Communications. – 1998. – Vol. 46, No. 7. – P. 931–939.
109. Ekstrom, M. P. Realizable Wiener filtering in two dimensions / M. P. Ekstrom // IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing. – 1982. – Vol. 30, No. 1. – P. 31–40.
110. Glumov, N. Proceedings of 15th International Conference on Pattern Recognition – ICPR-2000, Barcelona, Spain / N. Glumov, M. Gashnikov, V. Sergeyev. – 2000. – Vol. 3. – P. 232.
111. Hoeher, P. TCM on frequency-selective land mobile fading channels / P. Hoeher // Proceedings of the 5th Tirrenia International Workshop on Digital Communications. Sept. 1991. Tirrenia, Italy. – 1991. – P. 317–328.
112. Hoeher, P. Pilot-symbol-aided channel estimation in time and frequency / P. Hoeher, S. Kaiser, P. Robertson // Proc. 6th Commun. Theory Mini-Conf. in conjunction with IEEE GLOBECOM'97. November, 1997. Phoenix, Arizona. – 1997. – P. 90–96.
113. Jain, A. K. Partial differential equations and finite difference method in image processing. Pt I. Image representation / A. K. Jain // J. Optimiz. Theory and Appl. – 1977. – Vol. 23. – P. 65–91.
114. Jain, A. K. Partial differential equations and finite difference method in image processing. Pt II. Image restoration / A. K. Jain, J. R. Jain // IEEE Trans. Automat. Contr. – 1978. – Vol. 23, No. 5. – P. 817–834.
115. Lancaster, D. Using Cubic Spline Basis Functions for Image Pixel Interpolation. – 2003. http://www.tinaja.com

116. Malandrakis, C. Optimal location of sensors for linear stochastic distributed parameters / C. Malandrakis // Lect. Notes Contr. Inform. Sci. – 1978. – Vol. 1. – P. 92–113.

117. Meijering, E. Piecewise Polynomial Kernels for Image Interpolation: A Generalization of Cubic Convolution / E. Meijering, W. J. Niessen, M. A. Viergever // Proc. of International Conference on Image Processing – ICIP'99. – 1999. – Vol. 3. – P. 647–651.

118. Meijering, E. A Chronology of Interpolation: From Ancient Astronomy to Modern Signal and Image Processing / E. Meijering // Proceedings of the IEEE. – 2002. – Vol. 90, No. 3. – P. 319–342.

119. Morelli, M. A Comparison of Pilot-aided Channel Estimation Methods for OFDM Systems / M. Morelli, U. Mengali // IEEE Transactions on Signal Processing. – 2001. – Vol. 49, No. 12. – P. 3065–3073.

120. Muresan, D. D. Adaptively Quadratic (AQua) Image Interpolation / D. D. Muresan, T. W. Parks // IEEE Transactions on Image Processing. – 2003. – Vol. 12, No. 12. – P. 1720–1744.

121. Necker, M. An Adaptive Wiener-Filter for Improved Channel Estimation in Mobile OFDM-Systems / M. Necker, F. Sanzi, J. Speidel // Proc. of Internat. Symp. on Signal Proc. and Inform. Technol., IEEE 28-30 Dec. 2001. – P. 213–216.

122. Nee, R. van OFDM for wireless multimedia communications / R. van Nee, R. Prasad. – N.-Y. : Artech House, 2000.

123. Ogorodnikov, V. A. On stochastic interpolation of discrete random processes and fields / V. A. Ogorodnikov, S. M. Prigarin // Russian J. Numer. Anal. Math. Modelling. – 1996. – Vol. 11, No. 1. – P. 49–69.

124. Omatu, S. Optimal sensor location problem for a linear distributed parameter system / S. Omatu, S. Koide, T. Soeda // IEEE Trans. Automat. Contr. – 1978. – Vol. 23, No. 4. – P. 665–673.

125. Perko, R. Efficient Implementation of Higher Order Image Interpolation / R. Perko, H. Bischof // WSCG Short Communication papers proceedings. Plzen, Czech Republic. February 2-6, 2004. – P. 213–226.

126. Prigarin, S. M. On the interpolation of positive definite functions and stationary random sequences / S. M. Prigarin // Russian J. Numer. Anal. Math. Modelling. – 1998. – Vol. 13, No. 3. – P. 235–243.

127. Schafhuber, D. Kalman Tracking of Time-Varying Channels in Wireless MIMO-OFDM Systems / D. Schafhuber, G. Matz, F. Hlawatsch // Proc. 37th Asilomar Conf. Signals, Systems, Computers, Pacific Grove (CA). Nov. 2003. – P. 1261–1265.

128. Simeone, O. Adaptive Pilot Pattern for OFDM Systems / O. Simeone, U. Spagnolini // IEEE International Conference on Communications, Paris, June 20-24, 2004.

129. Vasiliev, K. Recurrent Adaptive Algorithms for Image Restoration / K. Vasiliev, M. Sluzhivyi // The Proceedings of the 6-th German-Russian Workshop "Pattern Recognition and Image Understanding". Novosibirsk, 24-30 August 2003. – P. 128–131.

130. Vasiliev, K. Errors of Random Field Restoration Based on Discrete Samples / K. Vasiliev, M. Sluzhivyi // The Proceedings of the 7th International Conference on Pattern Recognition and Image Analysis: New Information Technologies, PRIA-7-2004, St. Petersburg, Russian Federation. 18-23 October, 2004. – P. 130–132.

131. Vasil'ev, K. The Errors of Random Field Restoration on the Basis of Discrete Samples / K. Vasil'ev, M. Sluzhivyi // Pattern Recognition and Image Analysis. – 2005. – Vol. 15, No. 1. – P. 101–103.

132. Weinstein, S. B. Data Transmission by Frequency Division Multiplexing using the Discrete Fourier Transform / S. B. Weinstein, P. M. Ebert // IEEE Transactions on Communications. – 1971. – Vol. 19, No. 10. – P. 628–634.

133. Wilson, S. K. 16-QAM Modulation with Orthogonal Frequency Division Multiplexing in a Rayleigh-fading Environment / S. K. Wilson, R. E. Khayata,

J. M. Cioffi // Proc. IEEE Vehic. Technol. Conf.. June, 1994. Stockholm, Sweden. – 1994. – P. 1660–1664.

134. Woods, J. W. Two-Dimensional Discrete Markovian Fields / J. W. Woods // IEEE Transactions on Information Theory. – 1972. – Vol. 18, No. 3. – P. 232–240.

135. Woods, J. W. Two-dimensional Kalman filtering / J. W. Woods //Topics in Applied Physics. – Berlin, 1981. – Vol. 42. – P. 155–208.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Вычисление ковариаций ошибок оценивания

Пусть имеется однородное СП $x(\overline{t}) = x(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, $\overline{t} \in R^N$ с $M\{x\} = 0$, заданное корреляционной функцией (КФ)

$B_X(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n) = M\{x(t_1, t_2, \ldots, t_n)\, x(t_1 - \tau_1, t_2 - \tau_2, \ldots, t_n - \tau_n)\}$

или энергетическим спектром

$$G_X(\omega_1, \ldots, \omega_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} B_X(\tau_1, \ldots, \tau_n) e^{-j\omega_1\tau_1 - \ldots - j\omega_n\tau_n}\, d\tau_1 \ldots d\tau_n .$$

Соответственно, КФ СП может быть выражена через спектр

$$B_X(\tau_1, \ldots, \tau_n) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} G_X(\omega_1, \ldots, \omega_n) e^{j\omega_1\tau_1 + \ldots + j\omega_n\tau_n}\, d\omega_1 \ldots d\omega_n .$$

Данное СП наблюдается в смеси с аддитивной помехой $\theta(\overline{t}) = \theta(t_1, \ldots, t_n)$, имеющей КФ $B_\theta(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ и спектр $G_\theta(\omega_1, \ldots, \omega_n)$:

$z(t_1, \ldots, t_n) = x(t_1, \ldots, t_n) + \theta(t_1, \ldots, t_n)$

на всем пространстве $-\infty < t_1 < \infty, \ldots, -\infty < t_n < \infty$.

Оптимальная оценка ищется в классе линейных оценок

$$\widehat{x}(t_1, \ldots, t_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} h(u_1, \ldots, u_n)\, z(t_1 - u_1, \ldots, t_n - u_n)\, du_1 \ldots du_n , \qquad (\text{П.1.1})$$

где $h(u_1, \ldots, u_n)$ - весовая функция (импульсная характеристика линейного фильтра). Такое оценивание можно интерпретировать как многомерную фильтрацию. Для этого следует применить n-мерное преобразование Фурье к (П.1.1). Тогда получим

$$\widehat{X}(\omega_1, \ldots, \omega_n) = W(\omega_1, \ldots, \omega_n) Z(\omega_1, \ldots, \omega_n),$$

где $\widehat{X}(\overline{\omega})$ - спектр оценки; $W(\overline{\omega})$ - передаточная функция оптимального фильтра; $Z(\overline{\omega})$ - спектр входного сигнала. Оптимальная в смысле минимума дисперсии ошибки оценивания $\sigma_\varepsilon^2 = M\left\{\left(\hat{x}-x\right)^2\right\}$ весовая функция находится из уравнения Винера-Хопфа

$$\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty} h\left(u_1,\ldots,u_n\right)B_Z\left(v_1-u_1,\ldots,v_n-u_n\right)du_1\ldots du_n = B_X\left(v_1,\ldots,v_n\right). \qquad (\text{П.1.2})$$

При этом оптимальная передаточная функция имеет вид

$$W\left(\omega_1,\ldots,\omega_n\right) = \frac{G_X\left(\omega_1,\ldots,\omega_n\right)}{G_X\left(\omega_1,\ldots,\omega_n\right)+G_\theta\left(\omega_1,\ldots,\omega_n\right)}.$$

В данном случае требуется найти взаимную ковариационную функцию ошибок оценивания

$$\begin{aligned}&B_\varepsilon\left(\Delta_1,\ldots,\Delta_n\right) = \\ &= M\left\{\left(\hat{x}\left(t_1,\ldots,t_n\right)-x\left(t_1,\ldots,t_n\right)\right)\left(\hat{x}\left(t_1+\Delta_1,\ldots,t_n+\Delta_n\right)-x\left(t_1+\Delta_1,\ldots,t_n+\Delta_n\right)\right)\right\}\end{aligned} \qquad (\text{П.1.3})$$

Для достижения этой цели последовательно рассмотрим 4 слагаемых, входящих в выражение (П.1.3). При этом первое слагаемое является КФ исходного СП

$$M\left\{x\left(t_1,\ldots,t_n\right)x\left(t_1+\Delta_1,\ldots,t_n+\Delta_n\right)\right\} = B_X\left(\Delta_1,\ldots,\Delta_n\right).$$

Следующие два слагаемых одинаковы. С учетом выражения (П.1.1) имеем:

$$M\left\{x\left(t_1,\ldots,t_n\right)\hat{x}\left(t_1+\Delta_1,\ldots,t_n+\Delta_n\right)\right\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty} h\left(u_1,\ldots,u_n\right)M\left\{x\left(t_1,\ldots,t_n\right)z\left(t_1+\Delta_1-u_1,\ldots,t_n+\Delta_n-u_n\right)\right\}du_1\ldots du_n =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty} h\left(u_1,\ldots,u_n\right)B_X\left(\Delta_1-u_1,\ldots,\Delta_n-u_n\right)du_1\ldots du_n.$$

Первое слагаемое с учетом (П.1.2) принимает вид

$$M\left\{\hat{x}\left(t_1,\ldots,t_n\right)\hat{x}\left(t_1+\Delta_1,\ldots,t_n+\Delta_n\right)\right\} =$$

$$= M\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty} h\left(u_1,\ldots,u_n\right)z\left(t_1-u_1,\ldots,t_n-u_n\right)du_1\ldots du_n \times\right.$$

$$\left.\times\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty} h\left(v_1,\ldots,v_n\right)z\left(t_1+\Delta_1-v_1,\ldots,t_n+\Delta_n-v_n\right)dv_1\ldots dv_n\right\} =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty}\ldots\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\bar{u} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\ldots\int\limits_{-\infty}^{\infty} h(u_1,\ldots,u_n)h(v_1,\ldots,v_n)\, B_Z\left(u_1-v_1-\Delta_1,\ldots,u_n-v_n-\Delta_n\right)d\bar{v} =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty}\ldots\int\limits_{-\infty}^{\infty} h(v_1,\ldots,v_n)B_X\left(\Delta_1-v_1,\ldots,\Delta_n-v_n\right)dv_1\ldots dv_n .$$

При этом ковариация ошибок оптимального оценивания имеет вид

$$B_\varepsilon(\Delta_1,\ldots,\Delta_n) = B_X(\Delta_1,\ldots,\Delta_n) - \int\limits_{-\infty}^{\infty}\ldots\int\limits_{-\infty}^{\infty} h(u_1,\ldots,u_n)B_X\left(\Delta_1-u_1,\ldots,\Delta_n-u_n\right)du_1\ldots du_n$$

Преобразуя по Фурье энергетический спектр ошибки оценивания, получаем

$$G_\varepsilon(\omega_1,\ldots,\omega_n) = G_X(\omega_1,\ldots,\omega_n) - W(\omega_1,\ldots,\omega_n)G_X(\omega_1,\ldots,\omega_n) =$$

$$= G_X(\omega_1,\ldots,\omega_n)\left(1-\frac{G_X(\omega_1,\ldots,\omega_n)}{G_X(\omega_1,\ldots,\omega_n)+G_\theta(\omega_1,\ldots,\omega_n)}\right) = \frac{G_X G_\theta}{G_X+G_\theta}.$$

Таким образом, ковариационная функция ошибки это обратное преобразование Фурье от спектра ошибки оценивания

$$G_\varepsilon(\omega_1,\ldots,\omega_n) = \frac{G_X(\omega_1,\ldots,\omega_n)G_\theta(\omega_1,\ldots,\omega_n)}{G_X(\omega_1,\ldots,\omega_n)+G_\theta(\omega_1,\ldots,\omega_n)}. \qquad (\text{П.1.4})$$

В случае одномерного СП (случайной последовательности) с экспоненциальной КФ $B_X(\tau) = \sigma_X^2\, e^{-a|\tau|}$, энергетические спектры СП $G_X(\omega) = \dfrac{2a\sigma_X^2}{\omega^2+a^2}$ и аддитивного шума $G_\theta(\omega) = N_0$.

Тогда $W = \dfrac{G_X(\omega)}{G_X(\omega)+G_\theta(\omega)} = \dfrac{q}{(\omega/a)^2+(1+q)}$, где $q = 2\sigma_X^2/(N_0 a)$ - отношение дисперсии сигнала $x(t)$ к мощности помехи в полосе a сигнала.

При этом спектр ошибки оценивания имеет вид $G_\varepsilon(\omega) = \dfrac{N_0\, q}{(\omega/a)^2+(1+q)}$.

КФ ошибки оценивания может быть вычислена как обратное преобразование Фурье от соответствующего спектра:

$$B_\varepsilon(\Delta) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} G_\varepsilon(\omega)e^{j\omega\Delta}d\omega = \frac{\sigma_X^2}{\sqrt{1+q}}\, e^{-a\sqrt{1+q}\Delta}, \text{ где } \Delta = t_2 - t_1 .$$

В случае двумерного СП (изображения), имеющего экспоненциальную КФ

$B_X(\tau_1,\tau_2)=\sigma_X^2\, e^{-a_1|\tau_1|-a_2|\tau_2|}$ и, соответственно, спектр

$$G_X(\omega_1,\omega_2)=\frac{4\sigma_X^2 a_1 a_2}{\left(\omega_1^2+a_1^2\right)\left(\omega_2^2+a_2^2\right)},$$

принимая во внимание формулу (П.1.4), можно получить спектр ошибки оценивания

$$G_\varepsilon(\omega_1,\omega_2)=\frac{\dfrac{N_0 4\sigma_X^2 a_1 a_2}{\left(\omega_1^2+a_1^2\right)\left(\omega_1^2+a_1^2\right)}}{\left\{\dfrac{4\sigma_X^2 a_1 a_2}{\left(\omega_1^2+a_1^2\right)\left(\omega_1^2+a_1^2\right)}\right\}+N_0}.$$

Тогда соответствующая КФ ошибки оценивания будет иметь вид

$$B_\varepsilon(\tau_1,\tau_2)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}G_\varepsilon(\omega_1,\omega_2)e^{-j\omega_1\tau_1-j\omega_2\tau_2}d\omega_1 d\omega_2=$$

$$=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{-j\omega_1\tau_1-j\omega_2\tau_2}\right)\frac{4\sigma_X^2 N_0 a_1 a_2}{4\sigma_X^2 a_1 a_2+N_0\left(\omega_1^2+a_1^2\right)\left(\omega_2^2+a_2^2\right)}d\omega_1 d\omega_2 .$$

Так как подынтегральная функция четная, то данную формулу можно привести к следующему виду:

$$B_\varepsilon(\tau_1,\tau_2)=\frac{\sigma_X^2 a_1 a_2}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\omega_1\tau_1\, d\omega_1}{\omega_1^2+a_1^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\omega_2\tau_2\, d\omega_1}{\omega_2^2+a_2^2+\dfrac{4\sigma_X^2 a_1 a_2}{N_0\left(\omega_1^2+a_1^2\right)}}d\omega_1 d\omega_2 .$$

Далее, для удобства преобразований введем обозначения $A=\dfrac{4\sigma_X^2 a_1 a_2}{N_0}+a_1^2 a_2^2$ и $\beta=\sqrt{\dfrac{A+\omega_1^2 a_2^2}{\omega_1^2+a_1^2}}$, а также учтем, что интеграл $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\omega_2\tau_2}{\omega_2^2+\beta^2}d\omega_2=\frac{\pi}{\beta}\exp\left(-\beta|\tau_2|\right)$.

В результате получим следующий интеграл

$$B_\varepsilon(\tau_1,\tau_2)=\frac{\sigma_X^2 a_1 a_2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\omega_1\tau_1}{\sqrt{\left(\omega_1^2+a_1^2\right)\left(A+\omega_1^2 a_2^2\right)}}\exp\left(-\sqrt{\frac{A+\omega_1^2 a_2^2}{\omega_1^2+a_1^2}}|\tau_2|\right)d\omega_1, \qquad \text{(П.1.5)}$$

который может быть вычислен с помощью численных методов.

Для достижения этой цели применим формулу Симпсона [67, 88]

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left\{ f(a) + f(b) + 4\sum_{k=1}^{n} f(x_{2k-1}) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k}) \right\},$$

где $h = \dfrac{b-a}{2n}$, $x_0 = a$, $x_k = x_{k-1} + b$, $k = 1,2,\ldots,2n$.

По заданной предельной абсолютной погрешности $\varepsilon > 0$ подбирается параметр n или, что то же самое, шаг h, при котором выполняется неравенство $\left|R_n(f)\right| < \varepsilon$, где для формулы Симпсона $R_n(f) = \dfrac{b-a}{180} f^{(IV)}(\xi)\, h^4$, $\xi \in [a,b]$.

При этом коэффициенты a_1 и a_2 в (П.1.5) могут быть выражены через соответствующие коэффициенты корреляции СП $\rho_1 = e^{-a_1}$, $\rho_2 = e^{-a_2}$. При вычислении коэффициентов корреляции ошибок оценивания СП значения $|\tau_1|$ и $|\tau_2|$ задаются дискретно, т.е. например, на рис. 2.12, (в) для вычисления ковариации между элементами $\hat{x}_2$ и $\hat{x}_4$ необходимо задать $|\tau_1| = 1$ и $|\tau_2| = 1$, а для вычисления ковариации между элементами $\hat{x}_2$ и $\hat{x}_5$ необходимо задать $|\tau_1| = 1$ и $|\tau_2| = 2$.

В случае N-мерного разделимого непрерывного СП, имеющего спектр

$$G_X(\omega_1,\ldots,\omega_N) = \frac{2^N \sigma_X^2 \prod_{i=1}^{N} a_i}{\prod_{i=1}^{N}\left(\omega_i^2 + a_i^2\right)}$$

и, соответственно, экспоненциальную множительную КФ

$$B_X(\tau_1,\ldots,\tau_N) = \sigma_X^2\, e^{-\sum_{i=1}^{N} a_i|\tau_i|},$$

исходя из выражения (П.1.4) можно получить спектр ошибки оценивания

$$G_\varepsilon(\bar{\omega}) = \frac{N_0\, G_X(\bar{\omega})}{G_X(\bar{\omega}) + N_0}.$$

В случае N-мерного дискретного СП, имеющего множительную КФ

$$B_X(m_1,\ldots,m_N) = \sigma_X^2\, \rho_1^{|m_1|}\, \rho_2^{|m_2|} \ldots\, \rho_N^{|m_N|}$$

и соответствующий спектр

$$G_X\left(z_1,\ldots,z_N\right)=\frac{\sigma_X^2\left(1-\rho_1^2\right)\ldots\left(1-\rho_N^2\right)}{\prod_{i=1}^{N}\left(1-\rho_i z_i\right)\left(1-\rho_i z_i^{-1}\right)},\quad z_i=e^{j\omega_i},\ i=1,2,\ldots,N.$$

Уравнение Винера-Хопфа запишется в следующем виде

$$h_{\bar{j}}\sigma_\theta^2+\sum_{\bar{u}}h_{\bar{u}}\,B_X\left(\bar{u}-\bar{j}\right)=B_X\left(\bar{j}\right).$$

При этом дискретные наблюдения $z_{\bar{j}}=x_{\bar{j}}+\theta_{\bar{j}}$, $\bar{j}=\left(j_1,\ldots,j_N\right)$.

После дискретного преобразования Фурье получаем

$W\left(\omega_1,\ldots,\omega_n\right)=\dfrac{G_X\left(\bar{\omega}\right)}{G_X\left(\bar{\omega}\right)+\sigma_\theta^2}$, а спектр ошибки оценивания $G_\varepsilon\left(\bar{\omega}\right)=\sigma_\theta^2 W\left(\bar{\omega}\right)$.

КФ ошибки оценивания $B_\varepsilon\left(m_1,\ldots,m_n\right)$ в дискретном случае для СП с экспоненциальной разделимой КФ B_X можно найти как обратное ДПФ от $G_\varepsilon\left(\bar{\omega}\right)$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Вычисление дисперсии ошибки интерполяции для различных конфигураций расположения отсчетов

Для последовательности отсчетов при оценивании в центре по четырем ближайшим наблюдениям (рис. 2.8, б), используя формулу (2.5), можно вычислить соответствующие производные:

$$\frac{d\sigma_{\varepsilon 0}^2}{d\alpha_1} = \sigma_X^2 \left\{2\alpha_1 a_1 + 4\alpha_2 a_3 - 4a_4\right\} = 0, \quad \frac{d\sigma_{\varepsilon 0}^2}{d\alpha_2} = \sigma_X^2 \left\{2\alpha_2 a_2 + 4\alpha_1 a_3 - 4a_5\right\} = 0,$$

откуда получаем весовые коэффициенты

$$\alpha_1 = \frac{2\left(a_2 a_4 - 2a_3 a_5\right)}{a_1 a_2 - 4a_3^2}, \quad \alpha_2 = \frac{2\left(a_1 a_5 - 2a_3 a_4\right)}{a_1 a_2 - 4a_3^2},$$

где $a_1 = 2\left(1 + \frac{1}{q}\right) + 2\rho^3$, $a_2 = 2\left(1 + \frac{1}{q}\right) + 2\rho$, $a_3 = \rho\left(\rho + 1\right)$, $a_4 = \rho\sqrt{\rho}$, $a_5 = \sqrt{\rho}$.

В итоге имеем значение дисперсии ошибки интерполяции в центре:

$$\sigma_{\varepsilon 0}^2 = \sigma_X^2 - \alpha_1 \sum_{i=1}^{2} M\left[y_i x_0\right] - \alpha_2 \sum_{j=1}^{2} M\left[y_i x_0\right] =$$

$$= \sigma_X^2 \left\{\alpha_1^2 a_1 + \alpha_2^2 a_2 + 4\alpha_1\alpha_2 a_3 - 4\alpha_1 a_4 - 4\alpha_2 a_5 + 1\right\}.$$

Для двумерного СП отсчетов при оценивании в центре по восьми ближайшим наблюдениям (рис. 2.8, г), предположив, что СП -однородное ($\rho_1 = \rho_2 = \rho$) и используя формулу (2.5), можно вычислить соответствующие производные:

$$\frac{d\sigma_{\varepsilon 0}^2}{d\alpha_1} = 8\sigma_X^2 \left\{\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_3 - \rho^2\right\} = 0, \quad \frac{d\sigma_{\varepsilon 0}^2}{d\alpha_2} = 8\sigma_X^2 \left\{\alpha_2 A_2 + \alpha_1 A_3 - \rho\right\} = 0,$$

откуда получаем весовые коэффициенты

$$\alpha_1 = \frac{A_2\rho^2 - A_3\rho}{A_1 A_2 - A_3^2}, \quad \alpha_2 = \frac{A_1\rho - A_3\rho^2}{A_1 A_2 - A_3^2},$$

где $A_1 = 1 + \frac{1}{q} + 2\rho^2 + \rho^4$, $A_2 = 1 + \frac{1}{q} + 3\rho^2$, $A_3 = 2\rho\left(1 + \rho^2\right)$.

В итоге имеем значение дисперсии ошибки интерполяции в центре:

$$\sigma_{\varepsilon 0}^2 = \alpha_1^2 M\left\{\left(\sum_{i=1}^{4} z_i\right)^2\right\} + \alpha_2^2 M\left\{\left(\sum_{j=1}^{4} z_j\right)^2\right\} + \sigma_X^2 + 2\alpha_1\alpha_2 M\left\{\sum_{i=1}^{4} z_i \sum_{j=1}^{4} z_j\right\} -$$

$$-2M\left\{\alpha_1 \sum_{i=1}^{4} z_i x_0 + \alpha_2 \sum_{j=1}^{4} z_j x_0\right\} = \sigma_X^2\left\{1 + 4\alpha_1^2 A_1 + 4\alpha_2^2 A_2 + 8\alpha_1\alpha_2 A_3 - 8\left(\alpha_1\rho^2 + \alpha_2\rho\right)\right\}.$$

Для последовательности отсчетов при оценивании в центре по двум ближайшим оптимальным оценкам (рис. 2.12, а), используя формулы (2.18, 2.21-2.24), можно вычислить соответствующую производную:

$$\frac{d\sigma_{\varepsilon 0}^2}{d\alpha_1} = 4\alpha\left(\sigma_X^2\left(1+\rho\right) - \sigma_\varepsilon^2\left(1+r_\varepsilon\right)\right) - 4\left(\sigma_X^2\sqrt{\rho} - \sigma_\varepsilon^2\sqrt{r_\varepsilon}\right) = 0,$$

откуда получаем оптимальный весовой коэффициент

$$\alpha = \frac{\sigma_X^2\sqrt{\rho} - \sigma_\varepsilon^2\sqrt{r_\varepsilon}}{\sigma_X^2\left(1+\rho\right) - \sigma_\varepsilon^2\left(1+r_\varepsilon\right)},$$

где r_ε - коэффициент корреляции ошибок оценивания.

В итоге имеем значение дисперсии ошибки интерполяции в центре:

$$\sigma_{\varepsilon 0}^2 = 2\alpha^2\left[\sigma_X^2\left(1+\rho\right) - \sigma_\varepsilon^2\left(1+r_\varepsilon\right)\right] - 4\alpha\left[\sigma_X^2\sqrt{\rho} - \sigma_\varepsilon^2\sqrt{r_\varepsilon}\right] + \sigma_X^2.$$

Для последовательности отсчетов при оценивании по четырем ближайшим оптимальным оценкам (рис. 2.12, б), используя формулы (2.18, 2.21-2.24), можно вычислить соответствующие производные:

$$\frac{d\sigma_{\varepsilon 0}^2}{d\alpha_1} = 4\left(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_{12} - B_1\right) = 0, \quad \frac{d\sigma_{\varepsilon 0}^2}{d\alpha_2} = 4\left(\alpha_2 A_2 + \alpha_1 A_{12} - B_2\right) = 0,$$

откуда получаем весовые коэффициенты

$$\alpha_1 = \frac{B_2 A_{12} - A_2 B_1}{A_{12}^2 - A_1 A_2}, \quad \alpha_2 = \frac{B_1 A_{12} - A_1 B_2}{A_{12}^2 - A_1 A_2},$$

где $A_1 = \sigma_X^2\left(1+\rho^3\right) - \sigma_\varepsilon^2\left(1+r_\varepsilon^3\right)$, $A_2 = \sigma_X^2\left(1+\rho\right) - \sigma_\varepsilon^2\left(1+r_\varepsilon\right)$,

$A_{12} = \sigma_X^2\rho\left(1+\rho\right) - \sigma_\varepsilon^2 r_\varepsilon\left(1+r_\varepsilon\right)$, $B_1 = \sigma_X^2\rho\sqrt{\rho} - \sigma_\varepsilon^2 r_\varepsilon\sqrt{r_\varepsilon}$, $B_2 = \sigma_X^2\sqrt{\rho} - \sigma_\varepsilon^2\sqrt{r_\varepsilon}$,

r_ε - коэффициент корреляции ошибок оценивания.

В итоге имеем значение дисперсии ошибки интерполяции в центре:

$$\sigma_{\varepsilon 0}^2 = \alpha_1^2 M\left\{\widehat{x}_1^2 + 2\widehat{x}_1\widehat{x}_4 + \widehat{x}_4^2\right\} + \alpha_2^2 M\left\{\widehat{x}_2^2 + 2\widehat{x}_2\widehat{x}_3 + \widehat{x}_3^2\right\} +$$

$$+2\alpha_1\alpha_2 M\left\{\widehat{x}_1\widehat{x}_2 + \widehat{x}_2\widehat{x}_4 + \widehat{x}_1\widehat{x}_3 + \widehat{x}_3\widehat{x}_4\right\} - 2\alpha_1 M\left\{\widehat{x}_1 x_0 + \widehat{x}_4 x_0\right\} - 2\alpha_2 M\left\{\widehat{x}_2 x_0 + \widehat{x}_3 x_0\right\} + \sigma_X^2 =$$

$$= 2\alpha_1^2 A_1 + 2\alpha_2^2 A_2 + 4\alpha_1\alpha_2 A_{12} - 4\alpha_1 B_1 - 4\alpha_2 B_2 + \sigma_X^2 .$$

Для двумерного СП отсчетов при оценивании в центре по четырем ближайшим оптимальным оценкам (рис. 2.12, в), используя формулы (2.18, 2.21-2.24) и предполагая, что СП - однородное ($\rho_1 = \rho_2 = \rho$), вычислим соответствующую производную

$$\frac{d\sigma_{\varepsilon 0}^2}{d\alpha_1} = 8\alpha\left(\sigma_X^2\left(1+\rho\right)^2 - \sigma_\varepsilon^2\left(1 + 2r_\varepsilon + r_{\varepsilon D}\right)\right) - 8\left(\sigma_X^2\rho - \sigma_\varepsilon^2\sqrt{r_{\varepsilon D}}\right) = 0,$$

откуда получаем оптимальный весовой коэффициент

$$\alpha = \frac{\sigma_X^2\rho - \sigma_\varepsilon^2\sqrt{r_{\varepsilon D}}}{\sigma_X^2\left(1+\rho\right)^2 - \sigma_\varepsilon^2\left(1 + 2r_\varepsilon + r_{\varepsilon D}\right)},$$

где $r_{\varepsilon D}$ - диагональный коэффициент корреляции ошибок оценивания.

В итоге имеем значение дисперсии ошибки интерполяции в центре:

$$\sigma_{\varepsilon 0}^2 = 4\alpha^2\left[\sigma_X^2\left(1+\rho\right)^2 - \sigma_\varepsilon^2\left(1 + 2r_\varepsilon + r_{\varepsilon D}\right)\right] - 8\alpha\left[\sigma_X^2\rho - \sigma_\varepsilon^2\sqrt{r_{\varepsilon D}}\right] + \sigma_X^2 .$$

Для двумерного СП отсчетов при оценивании в центре по восьми ближайшим оптимальным оценкам (рис. 2.12, г), используя формулы (2.18, 2.21-2.24), предполагая, что СП -однородное ($\rho_1 = \rho_2 = \rho$) и вычисляя соответствующие производные $\dfrac{d\sigma_{\varepsilon 0}^2}{d\alpha_i} = 0$, $i = 1\ldots 3$, получим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_{12} + \alpha_3 A_{13} = A_{10} \\ 2\alpha_1 A_{12} + \alpha_2 A_2 + 2\alpha_3 A_{23} = A_{20} \\ 2\alpha_1 A_{13} + 2\alpha_2 A_{23} + \alpha_3 A_3 = A_{30} \end{cases}$$

откуда можно найти весовые коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

При этом

$$A_1 = \sigma_X^2 \left(1 + 2\rho^2 + \rho^4\right) - \sigma_\varepsilon^2 \left(1 + R_{13} + R_{15} + R_{17}\right),$$

$$A_2 = \sigma_X^2 \left(1 + \rho^2\right) - \sigma_\varepsilon^2 \left(1 + R_{13}\right), \quad A_3 = \sigma_X^2 \left(1 + \rho^2\right) - \sigma_\varepsilon^2 \left(1 + R_{17}\right),$$

$$A_{12} = \sigma_X^2 \rho \left(1 + \rho^2\right) - \sigma_\varepsilon^2 \left(R_{14} + R_{18}\right), \quad A_{13} = \sigma_X^2 \rho \left(1 + \rho^2\right) - \sigma_\varepsilon^2 \left(R_{12} + R_{16}\right),$$

$$A_{23} = \sigma_X^2 \rho^2 - \sigma_\varepsilon^2 R_{10}, \quad A_{10} = A_{23}, \quad A_{20} = \sigma_X^2 \rho - \sigma_\varepsilon^2 R_{12}, \quad A_{30} = \sigma_X^2 \rho - \sigma_\varepsilon^2 R_{18},$$

где $R_{ij} = M\left\{\varepsilon_i \varepsilon_j\right\} \big/ \sigma_\varepsilon^2$.

В итоге на основании формулы (2.25) получим значение дисперсии ошибки интерполяции в центре:

$$\sigma_{\varepsilon 0}^2 = 4\alpha_1^2 A_1 + 2\alpha_2^2 A_2 + 2\alpha_3^2 A_3 + 8\alpha_1\alpha_2 A_{12} + 8\alpha_1\alpha_3 A_{13} + 8\alpha_2\alpha_3 A_{23} -$$

$$-8\alpha_1 A_{10} - 4\alpha_2 A_{20} - 4\alpha_3 A_{30} + \sigma_X^2 .$$